TECHE UDINE

MANOSCRITTI

FONDO JOPPI

Manoscritto n. J_MSS_0046

I manoscritti che compongono compongono il fondo, assieme alle migliaia di testi a stampa - compresi rari incunaboli e cinquecentine - il Fondo Joppi, sono quasi esclusivamente di interesse friulano. La raccolta si è formata nell'arco di una sessantina di anni grazie alle ricerche di Vincenzo ed Antonio Joppi.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine - Inventario dei manoscritti del Fondo Joppi
https://www.techeudine.it/fondo-joppi
https://www.sbhu.it/

TRATTATO
DI
PLANIGRAFIA

N.° 46

Elementi

di

Planigrafia e Planimetria,

~~che servono all'intavolamento~~

~~alla~~

~~Planigrafia e Perenometria~~

di

Daniele Marangoni, già Prof.e di Geomet.a descrittiva
Architettura Teorico-pratica e Disegno nel R.o Liceo
ed ora
Prof.e delle stesse materie nell'I.R.a Scuola
Element.e Maggiore di Udine.

Prefazione.

I soccorsi che la Geometria presta alle arti tutte, ed in particolare a quelle relative alle costruzioni, sono abbastanza conosciuti, e sono tali che solo bastano a provare l'erroneità dell'opinione di alcuni artefici, che ignari di Geometria e figli alle idee accreditate dal tempo e dal pregiudizio, sostengono che lo studio delle Matematiche incatena anzi che raddrizzare e regolare l'immaginativa.

Così non la pensavano certamente né il Divino Platone, né il celebre Panfilo, i quali in vece escludevano dalle loro Scuole tutti quelli, ch'erano digiuni di Geometria.

In fatti, in vano tenterebbe un artista di giungere alla perfezione dell'arte sua col solo esercizio della mano, o colla sola pratica; non essendo dato di giungere allo scopo, se non che a quello, che provveduto della qualità necessarie onde pervenirvi, congiunge insieme la teoria e la pratica.

Non è però qui mio scopo il convincere di errore cotali artefici, colla lusinga di poter giungere a segno ch'essi di penetrino di questa verità; conoscendo quanto arduare e difficile impresa sia l'abbattere il pregiudizio; quel pregiudizio poi, che incatena l'immaginativa ed oscura l'intelletto: laonde non fa già la Geometria

com'

com' essi pretendono.

Egli è ai soli giovani, che alle arti belle ed alle arti meccaniche si destinano, ch'io vaccomando e caldamente lo studio di questa scienza, come principalissimo mezzo di giungere alla perfezione delle arti che vogliono professare; nella fiducia che questi giovani facilmente si persuaderanno, e benediranno poi allora il tempo consacrato allo studio della Geometria, quando loro avrà di farne l'applicazione, nelle molte e varie operazioni relative alle arti che professeranno.

Ma veniamo all'ordine da me tenuto nella classificazione de' problemi, che compongono questa Planimetria; non che al metodo di costruzione da me seguito nelle soluzioni de' problemi medesimi. E prima mi si permetta il fare una qualche osservazione sopra i metodi già conosciuti.

Le più semplici soluzioni della Geometria, dagli Antichi Geometri fino al terminare del secolo XVIII, sono state giudicate quelle, che dipendono dalla linea retta e dal cerchio, per le quali si usano unicamente la riga ed il compasso.

I vantaggi però che ha il compasso sopra la riga, sono reali e di molta importanza. Trattandosi specialmente di una riga alquanto lunga, è quasi impossibile ch'ella sia così dritta, che garantisca per tutto

il

al suo tratto della giusta posizione di tutti i punti che in essa sono. Di più, il dover strisciare lungo essa colla punta che segna, porta seco una incertezza di parallelismo nel moto dell'asse di questa punta, o di perfetto adattamento alle sfregolo della stessa, che rende di leggeri inutile la massima sua perfezione.

A questi due inconvenienti non va soggetto il compasso, il quale, purchè fermo nell'apertura e di giuste proporzioni, centrata una, l'altra girando, descrive da se un arco di tale precisione da non potersi desiderare di più.

Ed è pur certo che, se l'esattezza delle costruzioni dei problemi della Geometria dipende in gran parte dalla perfezione degl'istrumenti, che per la costruzione de' problemi stessi abbisognano, non si potrà lusingarsi di ottenere risultamenti molto precisi da quelle costruzioni nelle quali interviene la riga.

Fu dietro queste considerazioni che il celebre Geometra Lorenzo Mascheroni, esaminate le operazioni fondamentali della Geometria già eseguite colla riga ed il compasso, rivolse meravigliosamente a dimostrare come col solo compasso si possa risolvere qualsiasi problema di Geometria elementare. La sua opera intitolata La Geometria del Compasso, che presentava i risultamenti a cui esso pervenne, fu dal pubblico accolta con quel favore che meritava, ed appena un anno do-

po

po che fu data alla luce, cioè nel 1798, fu a Parigi in lingua Francese tradotta e ristampata.

Dopo tutto ciò, riguardo al metodo di costruzione de' problemi di questa Geometria, stendomi io attenuto interamente a quello proposto dal suddetto nominato Geometra, additerò dire che, allora quando gli Artefici li vorranno risolvere nella pratica, vedranno quanto l'uso del compasso in preferenza della riga facilita il ritrovamento dei punti mediante i quali si determinano le rette richieste per la soluzione di ciascun problema, e rigetteranno la riga.

Relativamente poi all'ordine da me tenuto nella classificazione dei problemi: ho procurato che nelle soluzioni dei primi si trovino sempre gli elementi necessarj per la soluzione di quelli, che vengono in seguito. Così i problemi che seguono rimandano agli antecedenti; la connessione stabilita ajuta la memoria dello studente, permettendogli di appoggiarsi alle nozioni di già acquistate, e riduce al minor numero possibile gli oggetti, che devono dividere la sua attenzione; in fine le figure sgombre dalle linee relative alle operazioni anteriori a quelle di cui si tratta, diventano molto più semplici senza che le soluzioni per ciò perdano della loro stabilità e della loro generalità.

E poichè le prime operazioni, che si eseguiscono

sopra

sopra le quantità numeriche, sono quelle stesse, che espo-
sto sulle linee e sulle superficie accade di dover effettua-
re: così da queste prime operazioni io comincio; mo-
strando prima come si domandino due o più
linee date; quindi come da una retta data si possa
togliere o sottrarre un'altra retta o più rette date;
assegno poi il modo di moltiplicare una retta data
per un numero qualunque; e finalmente come si
divida una qualunque retta in un numero qua-
lunque di parti eguali.

Ho stimato dovermi fare una maggior estensione
ai quei problemi, che sono di più frequente uso nelle
arti: come sono quelli relativi alla costruzione dei
differenti poligoni regolari sopra date basi; come pure
quelli, che riguardano la costruzione delle varie figu-
re simili, e delle equivalenti.

Trattandosi poi di un'opera elementare, de-
detti necessario fare a modo che il libro riuscire non
dovesse troppo voluminoso, nè troppo grande il nume-
ro delle figure. E quanto alla materia, pensando
che questa Geometria deve principalmente servire
ai bisogni degli artefici, ai quali poi bastando le sole
costruzioni dei problemi, e non di cercano gran fatto
delle dimostrazioni; per ciò mi sono determinato di
ommetterle nella maggior parte dei problemi, con
che si è diminuito il numero delle pagine.

Che

Che se il Geometra poi vorrà prendersi la pena di analizzare le costruzioni di quei problemi, ai quali mancano le dimostrazioni, vi troverà, io spero, quella geometrica precisione, della quale è suscettibile la natura de' problemi elementari; come pure troverà una sufficiente approssimazione in quelli superiori al secondo grado; e fra questi non dispiacerà forse il mezzo da me proposto nel libro XI, di rettificare per approssimazione qualunque arco di cerchio, maggiore anche dei 180°; la costruzione del qual problema, oltre che dà un'approssimazione sufficiente, è poi così semplice, da non poter desiderarsi di più; come non dispiacerà, io spero, il semplice mezzo da me proposto nel libro IV, di trovare cioè il punto incognito nel quale concorrono due rette date di posizione: non che quello di condurre da un punto qualunque, dato fuori delle due rette predette, una terza retta, che prodotta all'infinito debba passare per lo stesso punto nel quale convengono le due rette proposte.

Si meraviglierà forse taluno, ch'io insegni nel libro XI, la maniera di moltiplicare i numeri complessi; riguardandola come operazione estranea al mio assunto. Ma qualora consideri che tali operazioni sono inerenti alla natura de' problemi contenuti in quel libro, relativi alla valutazione delle su-

perficie

perficie, o alla planimetria; che possono trovarsi degli Artisti ignari delle regole relative ai maneggi di questa specie, ai quali tuttavia il mio lavoro potrebbe essere giovevole, e che il richiamo delle stesse regole non difficili a dimenticarsi può essere generalmente vantaggioso: non saran, io credo, inopportuni i calcoli da me esposti.

Termino finalmente questa Planigrafia con alcuni problemi, i quali benchè considerar si possano di puro dilettamento, pure stimando io che in molti casi possano essi tornare di qualche uso nelle Arti, ho creduto non doverli ommettere.

Tutto ciò premesso, io non credo conveniente di trattenere più a lungo il benevolo lettore, e solo mi ristringo a dire che a pubblicare la presente Geometria mi anima specialmente la persuasione in cui sono che essa per la frequente applicazione che può avere nella pratica, per la copia dei problemi che include, e per la grande semplicità delle costruzioni dei medesimi sia per riescire non indegna dell'altrui attenzione.

E quando questa ottenga sufficientemente il pubblico favore se non in riguardo al reale ben tenue valore della mia fatica, in riguardo almeno alla retta intenzione, che ebbi nell'intraprenderla; in tal caso mi farò un vero pregio di compiere, e pubbli-

pubblicare un altro lavoro analogo, che trattava della Stereografia, e della Perspettiva, non che di molti importanti e utilissimi problemi relativi alla Determinazione dei contorni delle ombre ordinarie, [illegible]

Elementi di Planigrafia

Libro Primo.

Definizioni e Nozioni preliminari.

1. La Planigrafia è quella parte della Geometria, che insegna a delineare i piani, e le superficie piane, qualunque sia la loro forma e grandezza.

2. Le superficie piane sono dotate di due dimensioni, lunghezza cioè, e larghezza. Esse si considerano generate dal movimento di una linea retta; la quale durante il suo movimento faccia sempre traccia di se stessa.

3. Lo spazio occupato da queste superficie è circoscritto da certi limiti, i quali ne determinano la forma. Questi limiti, che non hanno nè larghezza nè grossezza si dicono linee.

4. Le linee sono dotate di una sola dimensione, cioè di lunghezza; esse si considerano generate dal movimento di un punto; il quale durante il suo movimento faccia sempre traccia di se stesso. Dall'essere poi le linee generate dal punto, ne viene che i limiti o le estremità di queste sono punti.

5. Il punto non ha alcuna dimensione, ed è per ciò indivisibile nella quantità. Non avendo poi il punto alcuna dimensione, non è percettibile che al solo intelletto; e non potendosi eseguire nessuna operazione meccanica senza l'intervento di cose corporee, così è d'uopo rappresentare il punto matematico col punto fisico; e per la stessa ragione si è dovuto rappresentare la linea mate-

matica

della linea fisica, la quale per quanto sia sottile, ha però sempre una qualche grossezza, per cui si rende visibile.

6. Avvegnachè le linee non possano esistere indipendentemente dalle superficie, ciò non pertanto è stato loro separarsele col pensiero, e considerarle isolatamente.

7. Dall'avere considerato le superficie piane generate dal movimento di una retta: ne viene che, varierà la forma loro a seconda della legge dalla quale sarà regolato il movimento della retta generatrice.

8. Se la retta generatrice partendo dalla sua prima posizione si manterrà a questa sempre parallela durante il suo movimento: la superficie così generata sarà in generale un parallelogrammo, fig.a 21, o un quadrato fig.a 19., o finalmente un rombo, fig.a 20.

9. Se al contrario la retta generatrice stando immobile con una sua estremità, ruoterà intorno a questa, finchè sarà giunta al sito d'onde ha cominciato a moversi, la superficie così generata sarà un cerchio, o come taluni dicono una superficie circolare, fig.a 24.

10. Dall'avere considerata la linea generata dal movimento di un punto, ne viene che

11. Se il punto generatore, partendo dalla sua prima posizione, si manterrà sempre diretto ad un altro punto, la linea da esso generata sarà una retta, fig.a 1.

12. Se poi il punto generatore mutera ad ogni istante nel suo movimento direzione, la linea da esso generata sa-

sarà una curva, fig.a 2

13. Se il punto generatore manterrà unica la direzione nel suo cammino per un certo spazio, percorso il quale muterà ad ogni istante la direzione, in tal caso la linea da esso generata sarà una linea mista, fig.a 3

14. Se finalmente il punto generatore manterrà unica la sua direzione per un certo tratto di cammino, e quindi la muterà in un secondo spazio dirigendosi ad un altro punto, e così per un terzo spazio, un quarto spazio ec.; la linea generata secondo questa legge sarà una spezzata, fig.a 4.

15. Dalla definizione della superficie piana, e da quella della linea retta, si vede chiaramente che

16. Se una linea retta si distende sopra di un piano o superficie piana, ogni suo punto deve necessariamente trovarsi nel piano medesimo, ossia combaciare con esso. Che se al contrario la retta non combaciasse in tutta la sua estenzione colla superficie medesima: ciò indicherebbe che, o la linea non è retta, o non è piana la superficie.

17. Due linee qualunque, che s'incontrano in un punto formano un angolo, del quale le linee ne costituiscono i lati, ed il loro punto d'incontro il vertice dell'angolo.

18. Se i lati dell'angolo sono linee rette, come lo sono quelli dell'angolo A fig.a 5.; allora l'angolo è retti-linea.

19. Se al contrario i lati dell'angolo sono linee curve come l'angolo B, fig.a 6., l'angolo allora si dice curvi-linea.

20. Se finalmente uno dei lati dell'angolo è retto, e curvo

f.

l'altro, come quelli dell'angolo C fig.ª 4., l'angolo si dice misti-lineo.

21. Quando unico è l'angolo formato da due linee, come lo sono quelli delle presentate fig.ª 5, 6, e 7, basta allora indicarlo con una sola lettera posta al suo vertice.

22. Se molti poi sono gli angoli prodotti dall'intersezione di due o più linee, come accade nella fig.ª 8., è d'uopo in tal caso indicarli ciascuno con tre lettere, delle quali quella di mezzo dovrà sempre esprimere il vertice dell'angolo; per ciò le due rette AB, CD, che si tagliano in E, formano gli angoli AEC, CEB, BED, DEA.

23. Se una retta CD, fig.ª 9., incontrando un'altra retta AB, è rispetto a questa egualmente inclinata dall'una e dall'altra parte, queste due linee si dicono vicendevolmente perpendicolari: e gli angoli eguali ADC, BDC da esse formato, si dicono angoli retti.

24. Se poi una retta CD, fig.ª 10., ne incontra un'altra AB in modo, da formare due angoli diseguali; allora il maggiore CDB si dice ottuso, ed il minore ADC angolo acuto.

25. Se due rette situate nello stesso piano ed anche in piani diversi, per quanto si prolunghino mai non s'incontrano, queste due linee si dicono parallele fra di loro: come le due rette AB, CD, fig.ª 11.

26. Le superficie piane prendono nomi differenti secondo il genere delle linee dalle quali sono circoscritte.

27. Così la superficie A, fig.^a 12, circoscritta da linee rette, dicesi superficie rettilinea; ed in generale qualunque figura di questa specie, si chiama indistintamente col nome di rettilineo

28. La superficie B, fig.^a 13., perchè terminata da linee curve, si dice curvilinea.

29. Dicesi finalmente superficie mistilinea la superficie C, fig.^a 14, perchè circoscritta da linee alcune rette, ed altre curve.

30. Dicesi perimetro della figura, il complesso di tutte le linee, dalle quali la figura è circoscritta.

31. Dal differente numero delle linee, che concorrono a circoscrivere una superficie piana, prende questa nomi diversi. Dal non potersi poi formare una superficie o figura, senza l'intervento di tre linee almeno; ne viene che

32. La figura circoscritta da tre linee è la più semplice, e prende il nome di Triangolo. Se da quattro Tetragono o quadrilatero; se da cinque pentagono; se da sei esagono ec:

33. ‡ In ~~in~~ generale, qualunque sia il numero delle linee, che circoscrivono una superficie, viene essa chiamata indistintamente col nome di poligono.

~~34. Si dicono poi poligoni regolari quelli, i quali [illegible] come gli angoli, hanno tutti [illegible] rispettivamente eguali.~~

34. Riguardo ai poligoni di tre lati, che diconsi triangoli, ve ne sono di quattro specie, e sono.

35. Il triangolo equilatero, ch'è il solo poligono regolare fra quelli di tre lati, come ABC fig.a 15.

36. Il triangolo isoscele DEF, fig.a 16, nel quale non sono tra loro eguali se non che i due angoli alla base DF, e eguali tra loro i due lati insistenti sopra la base stessa.

37. Il triangolo scaleno GHK, fig.a 17., nel quale tanto i lati quanto gli angoli sono tutti fra loro rispettivamente diseguali.

38. Il triangolo rettangolo LMN, fig.a 18., il quale viene così chiamato per avere uno de' suoi angoli retto; e nel quale poi i lati si distinguono con nomi particolari, chiamandosi cioè ipotenusa il lato opposto all'angolo retto, e distinguendo col nome di cateti gli altri due lati.

Fra i poligoni poi di quattro lati si distinguono

39. Il quadrato ABCD fig.a 19., nel quale tanto i lati quanto gli angoli sono tutti tra loro rispettivamente eguali.

40. Il rombo EFGH, fig.a 20., il quale ha tutti quattro i lati eguali, e gli angoli non retti: ma però gli opposti eguali tra loro.

41. Il parallelogrammo o Romboide LMNO, fig.a 21., nel quale i soli lati opposti sono eguali e paralleli, come lo sono pure eguali fra loro gli angoli opposti.

42 Il parallelogrammo rettangolo PQRS, fig.a 22., il quale ha tutti quattro gli angoli retti, ed i soli lati opposti eguali e paralleli.

43. Il trapezio TUVY, fig.a 23., il quale non ha che due

soli

sui lati fra loro paralleli.

44. I lati AC, GH dei due triangoli, fig.ri 15 e 17; ed il lato OM del parallelogrammo, fig.o 21., sopra dei quali tanto il parallelogrammo quanto i triangoli predetti è supposto che di aggiaggino, si dicono le basi di quei triangoli e del parallelogrammo.

45. Per base poi di un triangolo isoscele DE7, fig.o 16, solitamente si prende il suo lato disuguale D7.

46. L'altezza tanto di un parallelogrammo, quanto di qualunque triangolo, è misurata dalla perpendicolare calata da un angolo opposto alla base sopra la base stessa, ovvero sul prolungamento di questa (nel caso, che la perpendicolare cada fuori della base del triangolo).

* 47. L'altezza poi del parallelogrammo rettangolo P2Re, fig.o 22, si ha nel lato SP, ovvero R2, insistente sopra la base SR.

48. Nel triangolo rettangolo LMN, fig.o 18., qualora si consideri per base un cateto MN, l'altro cateto ML misura l'altezza del triangolo.

49. Qualunque dei lati di un triangolo, finalmente, può essere considerato per base del triangolo.

50. Poligono equilatero è quello, in cui tutti i lati sono eguali.

51. Poligono equiangolo dicesi quello, di cui gli angoli sono eguali.

52. Poligono regolare è quello, in cui tanto i lati quanto gli angoli sono tutti fra loro rispettivamente eguali.

53. Due poligoni si dicono equilateri fra di loro quando i lati di uno sono rispettivamente eguali ai lati dell'altro. Si dicono pure equiangoli fra di loro quei poligoni, che hanno gli angoli rispet-

eguali.

54. Il Cerchio o Circolo è una superficie piana curvilinea, terminata da una linea curva rientrante in se stessa, la quale ha la proprietà di avere tutti i suoi punti equidistanti da un punto interno. AB3CD, pag.a 24, è il cerchio, O il punto interno equidistante da tutti i punti A, B, C, D ec.

55. La curva AB3CD, pag.a 24., la quale circoscrive la superficie circolare, si dice Circonferenza o Periferia del cerchio, e lo spazio rinchiuso dalla curva medesima superficie o area circolare.

56. Il punto O equidistante da tutti i punti A137EC ec: della periferia, si chiama Centro del cerchio.

57. Qualunque retta OA, OB, OC ec: condotta dal centro O, a qualunque punto A, B, C ec: della periferia, si dice Raggio del cerchio.

58. Diametro del Cerchio, è una retta AC, BD ec:, che passa pel centro O, e termina colle sue estremità alla periferia.

59. Dalla definizione del cerchio, e dalle due ultime ne viene che tutti i raggi di uno stesso cerchio, o di cerchj eguali, sono tutti fra loro eguali, come lo sono pure i diametri dello stesso cerchio, o di cerchj eguali, perchè composto di due raggi.

60. Corda o Sottesa, è una retta 79, che congiunge due punti della circonferenza senza passare pel centro O.

61. Arco di Cerchio, è una porzione di circonferenza, per esempio 7C9 qualunque.

62. Settore di cerchio è una porzione di superficie circolare,

vine=

rinchiusa da due raggi OA, OB, e dall'arco ACB da essi raggi compreso.

63. Segmento circolare, è una porzione ACB di area circolare condenuta da una corda AB, e dall'arco ACB da essa corda sottesso.

64. Semicerchio o Semicircolo, è un segmento condenuto da un diametro AC, e dalla semicirconferenza ABC segata dal diametro stesso.

65. Tangente, è una retta HK, che tocca effettivamente il cerchio ABCD in un punto L

66. Punto di tangenza o Punto del contatto, è il punto L in cui la tangente HK tocca la circonferenza del cerchio.

67. Angolo del contatto, è un angolo misteneo HLB, ovvero PLB, formato da una tangente HK, o PE, col cerchio ABD.

68. Una retta EP condotta all'estremità E di un raggio EC qualunque, perpendicolare al raggio medesimo, è tangente al cerchio, e l'estremità E del raggio determina il punto del contatto.

69. È una retta ZR, che parte da un punto Z qualunque situato fuori della superficie circolare, prodotta dentro al cerchio, passerà per il centro, allora la retta ZR si dice Normale al cerchio ABCD.

70. Secante, si chiama una retta MN, che sega la circonferenza di un cerchio ABCD in due punti S E: e questi due punti si dicono, punti di sezione della secante MN.

71. Diametri conjugati, si dicono i due diametri AC, BD di

cui

uno stesso cerchio reciprocamente perpendicolari. Egualmente se due diametri AC, BD, di uno stesso cerchio ABCD, saranno paralleli alle rispettive loro tangenti, si diranno coniugati.

72. Ordinata, si dice una retta ZY innalzata da un punto qualunque Z di un diametro, perpendicolare a questo, e che termina alla circonferenza del cerchio; perciò la retta ZY è una ordinata del diametro AC. Per la stessa ragione il raggio OB, essendo normale al diametro AC, sarà anch'esso una ordinata del diametro AC.

73. Doppia ordinata, è una retta VV condotta ad un punto qualunque Z del diametro AC, perpendicolare a questo, e che ha le estremità sono alla periferia del cerchio. Perciò il diametro BD, può considerarsi come una doppia ordinata del diametro AC, perchè normale a questo.

74. Circoli concentrici, sono due circoli ABC, DEF fig.a 25, descritti da uno stesso centro O.

75. Circoli eccentrici, così si chiamano due cerchj LMP, MP2, fig.a 26, ovvero ABC, ECD, fig.a 24, che sono descritti da centri diversi.

76. Circoli secanti, sono due circoli LMP, MP2, fig.a 26, che si segano in due punti MP, delle loro periferie.

77. Circoli Tangenti, si dicono a due cerchj ABC, CED, fig.a 27, i quali vicendevolmente si toccano in un punto delle rispettive circonferenze.

78. Poligono inscritto, si dice un poligono ABCDE, fig.a 28, che ha tutti i suoi vertici ABCDE alla circonferenza del

cerchio

cerchio NOP2R

79. Poligono circoscritto al cerchio, è un poligono JGHLM, i cui lati sono tutti tangenti alla periferia di un cerchio NOP2R, fig.a 28.

80. Cerchio iscritto ad un poligono, è il cerchio NOP2R, la cui circonferenza tocca tutti i lati di un poligono JGHLM, fig.a 28.

81. Circolo circoscritto; dicesi un cerchio NOP2R, fig.a 28, la cui circonferenza passa per tutti i vertici di un poligono ABCDE.

Spiegazione dei soli termini, e dei soli segni dei quali si fa uso in questa Geometria.

82. Problema è una questione proposta, la quale esige soluzione.

83. Il segno = posto fra due quantità, indica che le quantità stesse sono eguali fra loro. Così A = B indica che la quantità espressa da A è eguale alla quantità rappresentata da B.

84. Il segno +, che si pronuncia più, indica l'addizione o somma delle quantità alle quali è frapposto. Così A+B rappresenta la somma delle due quantità espresse da A e da B.

85. Il segno —, che si pronuncia meno, denota la sottrazione, che si deve fare dalla quantità, che lo precede, della quantità, che

che lo segue. Così A − B rappresenta la sottra o la differenza delle due quantità espresse da A e B.

86. Il segno X, che si pronuncia moltiplicato per, indica la moltiplicazione. Così A X B esprime il prodotto della quantità espressa da A moltiplicata per la quantità B. Molte volte a questo segno si sostituisce un punto, così che A X B è lo stesso che A . B.

87. Una cifra numerica posta d'avanti ad una quantità qualunque serve di moltiplicatore a questa quantità, e dicesi il coefficiente. Così, per esprimere che una data linea AB si deve prendere due volte si scrive 2 AB.

88. L'espressione $\frac{A}{B}$ esprime il quoto della quantità A divisa per la quantità B. E così pure trovandosi l'espressione $\frac{A+B-C}{L+M-N}$, si dovrà intendere che della quantità A + B si dovrà sottrarre la quantità C, e quindi dividere il prodotto per il prodotto di L + M − N.

89. Il quadrato formato sopra una data retta MN s'indica con MN^2, essendo così espresso il prodotto della quantità MN moltiplicata in se stessa.

90. Il segno $\sqrt{\ }$, che si pronuncia radicale, posto d'avanti ad una quantità qualunque, indica la radice quadrata della quantità, che lo segue; così $\sqrt{A X B}$ è la radice del prodotto della quantità A moltiplicata per la quantità B.

Avvertimento.

91. Il linguaggio usato dalla maggior parte degli Elementisti per indicare le costruzioni delle figure, è spesso così prolisso e pieno d'inutili ripetizioni, che a mio credere, stancano l'attenzione dello studente, anzi che giovare alla chiarezza delle spiegazioni.

92. Per la qual cosa ho procurato in questa parte d'esser breve, senza però mai riuscire oscuro, facendo uso talvolta di alcuni compendj, che per avventura fortuitamente indotti al solo guardare la figura.

93. Per esempio nella fig.ª 29., della quale avendo tosto dovuto parlare, in vece di dire; col raggio AB, e col centro B si descriva un arco, che tagli la semicirconferenza in C; quindi col istesso raggio e centro C, si descriva un altro arco, che tagli la stessa circonferenza in D; e finalmente col istesso raggio e centro D si segni un altro arco, che tagli la stessa semicirconferenza in E ec.; dirò soltanto: Col centro A, e raggio AB si descriva la semicirconferenza BCDE, facendo cioè AB = BC = CD = DE. Perchè i punti B,C,D,E coi quali s'indica la semicirconferenza, essendo nella stessa, non potrà mai esservi pericolo di equivoco.

94. Di più: se alcuna volta dirò, si descriva la semicirconferenza BCDE, senza altro aggiungere; è chiaro, che per determinare questa semicirconferenza o semicerchio, si dovranno fare le tre sezioni suindicate, sapendosi che il semicerchio è composto di tre archi eguali, ogn'uno dè quali

essendo

spento la sesta parte di tutta la circonferenza del cerchio, avrà per conseguenza la corda eguale al raggio, come in seguito si vedrà.

95. E poichè nelle costruzioni de' problemi fatte con questo metodo, occorre pressochè in tutte dover descrivere dei semicerchj: e attesochè la continua ripetizione della stessa costruzione riuscirebbe stucchevole; per ciò in seguito non dirò se non che, si descriva la semicirconferenza BCDE, senza altro aggiungere.

96. Talvolta pure dirò di dover descrivere un tal arco indefinito, che passi per due tali punti, e di quest'arco non si vedranno nella figura se non che le due tale porzioni di esso, che passano per i due punti indicati; e ciò non solo per non ingombrare di molti archi la figura, ma perchè le due porzioni del predetto arco bastano, per ottenere dalle intersezioni loro con altri archi quei punti, che sono necessarj alla soluzione del problema.

Libro II.

Dell' addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione delle Linee rette

Dell' Addizione Capitolo I.

Problema 1.

97. Date due rette AL, MN fig.ª 29., aggiungere alla AL la MN in linea retta, così che la LE riesca eguale alla somma delle due rette proposte.

Soluzione. Col centro A, e raggio eguale alla retta MN si descriva la semicirconferenza BCE, facendo cioè al raggio AB = BC = CD = DE. Se si congiungeranno con una retta i due punti A ed E; si avrà LE = AL + MN, come fu proposto.

Problema 2.

98. Date tre rette AZ, GH, KL fig.ª 30., sommarle insieme; ossia unirle in una sola retta, in maniera che YZ riesca eguale alla somma delle tre rette date.

Soluzione. Col centro A, estremità della data retta AZ, e raggio GH, seconda delle rette date, si segni un arco indefinito CBD, e si faccia al raggio AB = BC = BD. Quindi dai punti C, D come centri, e raggio CD si segnino due archi, che si taglino in E; sarà AE = GH. Ora da E come centro e raggio KL si segni un arco MN. Se dal punto A si condurrà una retta, che passi per E, e si produrrà sino ad incontrare in Y l'arco MN; si avrà YZ = AZ + GH + KL: cioè eguale alla somma delle tre rette date, come fu proposto.

Oss.-

99. Osservazione. Col metodo indicato nei due problemi precedenti, qualunque sia il numero delle rette da sommarsi insieme, si potranno queste congiungere in una sola, e medesima retta.

Capitolo II.

Della Sottrazione

Problema 3.

100. Date due rette AB, ed. fig.a 31. E, dalla maggiore AB tagliarne una parte AE eguale alla minor retta CD.

Soluzione. Con raggio CD, e centro A, estremità della maggior retta, si segni un arco, che tagli in E la retta AB. Sarà la parte tagliata AE = CD, come si ricercava. Sarà inoltre EB la differenza fra le proposte due rette.

Problema 4.

101. Da una retta AB, fig.a 32., tagliarne una parte AH eguale a due rette date CD, EF prese insieme.

Soluzione. Con raggio eguale ad una delle due rette da sottrarsi, per esempio CD, e centro A, si tagli la retta AB in G. Quindi con raggio EF, e centro G, si tagli la stessa AB in H. Si avrà AH = CD + EF, come fu proposto. Si avrà pure HB eguale alla differenza fra le due rette CD, EF prese insieme, e la data AB.

102. Osservazione. Se il prodotto di CD + EF, riuscisse maggiore della AB, la soluzione del problema sarebbe impossibile.

Della

Capitolo III.°

Della Moltiplicazione.

Problema 5.

103. Duplicare una data retta, ovvero una data distanza AB, fig.ª 33. V.

Soluzione. Col centro A, e raggio AB, si descriva la semicirconferenza BCDE, facendo al raggio AB = BC = CD = DE. Sarà AE doppia di AB, e nel suo prolungamento, come si ricercava.

Problema 6.

104. Triplicare, quadruplicare una data retta AB fig.ª 34.

Soluzione. Col centro A, e raggio AB, si descriva la semicirconferenza BCDE (come nel problema precedente): e col centro E, e raggio stesso AB, si segni l'altra semicirconferenza dal F. E si avrà AF nel prolungamento della BA, e BF tripla di AB. Quindi collo stesso raggio AB, e centro F si descriva la semicirconferenza EHL; si avrà FL nel prolungamento della AB, e BL quadrupla di AB, come si voleva.

Seguitando collo stesso metodo, si potrà moltiplicare la data retta all' infinito. . . . .

Capitolo IV.

Della divisione delle rette.

Problema 7

105. Dividere una data retta, ovvero una data distanza AB fig.ª 35 in due parti eguali: cioè trovare il punto che è alla metà della retta, o della distanza AB.

Soluzione. Col centro A, e raggio AB si segni il semi-

cerchio

BCDE. Quindi col centro B, e raggio BE, si descriva l'arco indefinito FEG, e dal centro E, con raggio EC, si tagli quest'arco nei punti F e G. Finalmente da questi punti F, G come centri, e col raggio stesso FE si segnino due archi, che si taglino in H. Sarà il punto H il cercato.

Problema 8.

Dividere una data retta, o una data distanza AB, fig: 36. in tre parti eguali.

Soluzione I.ª Dai due punti A, B come centri, e col raggio AB, si descrivano i due semicerchj BCDE, ACFG. Quindi coi centri F ed E, e raggio FE si segnino i due archi indefiniti MN, PQ, e dai medesimi centri, e raggio FA si taglino gli archi predetti nei punti M, N, P, Q. Finalmente da questi punti M N P Q come centri, e col raggio stesso MG si segnino quattro archi, che si taglino, a due a due, nei punti m ed n, quali saranno i punti della divisione cercata. Soluzione II.ª Se poi AB fosse effettivamente una retta, e non i soli estremi di essa, ovvero una semplice distanza, in tal caso il problema si risolverà in questo modo. Descritti, come prima, i due semicerchj BCDE, ACFG: dai centri F ed E, e col raggio FE si segnino i due archi indefiniti GH, EP, e dai medesimi centri F ed E, e col raggio FA si taglino i predetti archi in M, e P. Una presa per raggio la distanza di questi due punti MP, dai medesimi due centri F ed E, si facciano sopra la data AB le due segnoni m ed n. Saranno i punti m ed n i cercati, i quali necessariamente dovranno coincidere con quelli trovati nella soluzione I.ª

Per

Problema 9.

107. Dividere una data retta AB, fig.ª 31., in un numero qualunque di parti eguali.

Soluzione. Si voglia, per esempio, dividere la data AB, in cinque parti eguali. Si moltiplichi la retta data, per il numero delle parti, nelle quali vuolsi essa dividere, facendo sì AC quintupla di AB (prob.ª 6.); e nel suo prolungamento. Quindi dai punti A, C come centri, e col raggio AC si seguino due archi EC, DB, e dai medesimi centri A, C, e col raggio AB si seguino altri due archi, che seghino i primi nei punti D, E. Fatta per raggio la distanza dei due punti D, E, col centro C si faccia, sopra la AB, la sezione F; sarà AF la quinta parte di AB. Ciò fatto, si potrebbe quadruplicare la FB, e colla sottrazione di prima trovare le altre quinte parti di AB. Si otterranno però più speditamente come segue. Si prendino esattamente i rimanenti quattro quinti, cioè la FB, e di porti questa misura due volte da F verso B, e si segni il punto K: sarà AK due quinte parti di AB; poichè $\frac{4}{5} \times 2 = 1\frac{3}{5} = 2K$; perciò $AK - 2K = 2 - 1\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Quindi, portando la stessa FB tre volte da H verso A, e segnato il punto M, sarà $AM = \frac{3}{5}$ di AB; e finalmente portando la FB quattro volte da K verso A, e segnato il punto N, essendo $KN = \frac{4}{5} \times 4 = 3\frac{1}{5}$: sarà $AK - KN = 4 - 3\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Sarà così divisa la AB in cinque parti eguali, come fu proposto.

108. Questo metodo può molto servire nella pratica, come si vedrà in seguito, per dividere per esempio in linee un dato piede

piede già diviso in pollici; perchè essendo per supposizione AC eguale a dodici pollici, risulterà AT eguale ad una duodecima parte del primo pollice AB, cioè ad una linea. Nella stessa guisa il Metro già diviso in Decimetri si potrà dividere in Centimetri, e questi in Millimetri.

Problema 10.

109. Dividere una data retta AB, fig.ª 38. in cinque parti eguali, anche nel caso, che non si potesse quadruplicare la retta data, come nel problema antecedente.

Soluzione. Con raggio AB, e centro A si descriva il cerchio BDEp, e nella sua circonferenza si faccia il raggio AB = BC = CD = DE. Coi centri B ed E, e raggio BD si descrivano i quattro archi, che si tagliano in a ed á. Con raggio AB, e centro á, si tagli la circonferenza del cerchio descritto in g, e collo stesso raggio e centro g si descrivi l'arco A n á. Quindi con raggio BE, e centro a si tagli il predetto arco in n; con raggio á n, e centro B si tagli la circonferenza del cerchio nei due punti P, p. Collo stesso raggio BP, e centri P, p si descrivano due archi, che si taglino in 2. Sarà A2 la quinta parte di AB cercata.

110. Dalla costruzione di questo problema si ricava mostrare la divisione decimale, che si eseguisce dividendo in due parti eguali, quindi in cinque, o viceversa.

Libro

Libro III.

Dell'incontro e della intersezione delle rette; della costruzione, divisione, e moltiplicazione degli angoli da esse formati; delle perpendicolari e delle parallele.

Capitolo I.° delle Normali.

Problema 11.

111. Data una retta AB, fig.ra 39., trovare due punti tali, che congiunti con una retta, riesca questa normale alla data AB, e la tagli in due parti eguali.

Soluzione. Dalle estremità A, B come centri, e con raggio un poco maggiore della metà di AB si taglino due archi, che si taglino nei punto C, D; saranno questi i punti cercati, per i quali conducendo una retta CD, riuscirà questa normale alla AB: e sarà la AB da questa normale divisa in due parti eguali.

Problema 12.

112. Data una retta AB, fig.ra 40., ed in essa un punto C qualunque: trovare un punto tale, che conducendo da questo una retta al dato punto C, riesca questa normale alla AB.

Soluzione. Dal dato punto C come centro, e con raggio arbitrario, per esempio CD, si segni una terza parte di circonferenza di cerchio, facendo cioè il raggio CD = DE = EF. Quindi col lo stesso raggio, e centri E, F si taglino due archi, che si taglino in G. Sarà questo il punto cercato.

113. Osservazione. Essendo le due rette AB, CG fra loro perpendicolari,

per ciò gli angoli da esse formati saranno "retti".

Problema 13.

114. Data una retta AB, fig.a 41., trovare il punto, dal quale conducendo una retta all'estremità a della data AB, riesca essa normale alla retta proposta.

Soluzione. Dai due punti estremi A, B, della proposta retta, come centri, e raggio arbitrario si segnino due archi, che si taglino in M. Quindi col centro M, e raggio stesso MA, si descriva la semicirconferenza BCDE, facendo, come si è detto, al raggio MA = BC = CD = DE. Sarà E il punto cercato.

115. Osservazione. Se in vece che da A, si vorrà innalzare la perpendicolare dalla estremità B, non si avrà che ad invertire la costruzione, descrivendo cioè il semicerchio BCDE da A verso B, in luogo che da B verso A.

Problema 14.

116. Data una retta AB, fig.a 42, ed un punto C fuori di essa, comunque situato, fuorchè nel prolungamento della data AB: Trovare un altro punto, dal quale condotta una retta al dato punto C, riesca questa normale alla AB.

Soluzione I.a Dal dato punto C come centro, e con raggio arbitrario, maggiore però della distanza del punto C dalla retta AB, si segni un arco, che tagli la data retta nei due punti DE. Quindi coi centri D, E, e raggio arbitrario, si segnino due archi,

che si tagliino in F. Sarà il punto F, il cercato.

117 Se la posizione del punto C non permettesse di poter descrivere l'arco DE, come accade nella fig.ª 43: in tal caso si risolverà il problema nella maniera che segue.

Soluzione II. Preso nella Data AB un punto qualunque D, e trovata la distanza dei due punti C, D per metà (probl.º 7, e 11) col punto E come centro, e col raggio EC, si segni un arco che tagli la AB nel punto F. Sarà F il punto cercato; dal quale conducendo una retta al Dato punto C, riescirà questa normale alla proposta AB, come si voleva.

118. Osservazione. Quanto più il punto D sarà lontano da A, di tanto la distanza F, fatta coll'arco descritto da E, riescirà ad angolo più vicino al retto.

Capitolo II.º Delle parallele.

Problema 15.

119. Dati due punti AB di una retta, fig.ª 44., ed un punto C situato comunque, fuorchè nella Data retta o nel suo prolungamento; trovare un altro punto tale, che la retta, che possa condotta da questo al punto C, riesca parallela alla AB.

Soluzione I. Con raggio eguale alla distanza dei due punti A, C, e centro B, si segni un arco che passi per D. e da C come centro, e col raggio AB, si tagli il predetto arco in D. Sarà D il punto cercato

120. Se poi sarà data la retta AB, fig.ª 45., e potremo servirci di essa, il problema allora si risolverà come segue.

Sol=

Soluzione II. Da un qualunque punto F, preso ad arbitrio nella retta data, come centro, e col raggio FC, si segni un arco, che tagli la retta AB in E. Quindi collo stesso raggio, e centro C, si segni un altro arco indefinito FD; si faccia l'arco FD = CE; sarà D il punto cercato.

Capitolo III. della bisezione degli angoli, e bisezione del retto.

Problema 16. 14

121. Dato un angolo rettilineo ABC, fig.ª 46., trovare un punto, dal quale condotta una retta al vertice B dell'angolo dato, questa divida l'angolo ABC in due angoli eguali

Soluzione. Dal vertice B come centro, e col raggio arbitrario, si segni un arco, che tagli i lati dell'angolo nei punti E, F; quindi da questi punti come centri, e con raggio qualunque si segnino due archi, che si taglino in D. Sarà D il punto cercato.

Problema 17.

122. Dato un angolo rettilineo ABC, fig.ª 46., innalzare dal suo vertice B una retta, che formi coi lati dell'angolo angoli eguali, ovvero che sia egualmente inclinata ai lati medesimi.

Soluzione. Fatta la costruzione del problema precedente: si prolungherà la retta DB sino in G. Sarà GB la retta cercata.

Problema 18.

123. Dato un angolo retto ABC, fig.ª 47., dividerlo in tre parti

parti eguali.

Soluzione. Preso a piacere sopra uno dei lati dell'angolo dato un punto D, da questo come centro, col raggio DB si segni una terza parte di cerchio BE7: facendo cioè al raggio DB = BE = E7. Saranno E, 7 i punti, dai quali conducendo al vertice B dell'angolo due rette EB, 7B, queste divideranno l'angolo retto dato in tre parti eguali, ovvero nei tre angoli eguali ABE, EB7, 7BD.

124. Di questa triplice divisione, che dicesi trisezione dell'angolo, il solo angolo retto, o di 90°, è quello sopra del quale si può eseguire la divisione: e nessun altro.

Capitolo IV. Della addizione e moltiplicazione degli angoli.

Problema 19.

125. Dato un angolo M qualunque, fig.a 48, ed un punto N, trovare altri due punti, per i quali conducendo da N due rette, formino queste un angolo eguale al dato angolo M.

Soluzione. Dal vertice M del dato angolo come centro, e con raggio arbitrario, si segni un arco P2, che tagli i lati dell'angolo. Quindi col medesimo raggio, e centro N, si segni un altro arco RS. Si faccia RS = P2: saranno R, S i punti cercati, per i quali se dal punto N si guideranno le due rette NR, NS, l'angolo RNS sarà eguale all'angolo dato.

Problema 20.

126. Dato un angolo BAC, fig.a 49., duplicarlo, triplicarlo, quadruplicarlo, ec.a.

Sol=

2. Supposto il vertice A dell'angolo dato come centro, e con raggi arbitrarj, si descrivano due archi di cerchio concentrici CE, BD. Quindi fatta CD = CB, se si condurrà la DB, si avrà l'angolo DAB doppio dell'angolo dato. Volendolo triplicare, basterà fare DE = DC, e si avrà EAB triplo di BAC. Facendo in oltre EF = ED, se si condurrà FA, si avrà l'angolo FAB quadruplo dell'angolo BAC dato: e così via via.

Problema 21.

127. Per un punto P dato sopra una retta MN, fig.a 30, condurre una retta 2PR, che formi colla MN angoli rispettivamente eguali a quelli formati dalle due rette AB, CD, che si tagliano in E.

Soluzione. Dal vertice E, dagli angoli formati dalle due rette date, come centro, e con raggio arbitrario, si descrivi un arco, che tagli le due rette nei punti FG, e collo stesso raggio, e centro P, si descrivi l'arco indefinito HL, che tagli in H la data retta MN: si faccia l'arco HL = FG. Se per i due punti LP si condurrà una retta 2PR, sarà questa la retta cercata.

Problema 22.

128. Dati tre punti ABC, fig.a 51., esaminare se sono nella stessa retta.

Soluzione. Dai due punti A e C come centri, e con raggio arbitrario si descrivano due archi, che si taglino nei due punti D, E; se da questi due punti come centri, e col raggio DB, descri-

vendo

due archi, la sezione loro coinciderà col terzo punto B, ciò indicherà che i tre punti A, B, C sono nella medesima retta. Che se, al contrario, gli archi descritti si tagliassero in un punto diverso, e non nel punto B, in tal caso quest'ultimo sarebbe fuori della retta, che congiunge gli altri due punti A e C.

Problema 23.

129. Dati tre punti A, B, C, fig.ª 52., esaminare se la retta, che si conducesse da C a B, sarà perpendicolare o normale a quella, che sarà condotta da A a B.

Soluzione. Col centro B, e raggio BA, si descriva il semicerchio ADEF, facendo, come altra volta si è detto, al raggio BA = AD = DE = EF. Se il terzo punto C sarà equidistante dai due punti A ed F, ciò indicherà che l'angolo CBA sarà retto, e per conseguenza le rette CB, BA normali fra loro. Diversamente non lo sarebbero.

Problema 24.

130. Dati due punti A, B di una retta, fig.ª 53, e due C, D di un'altra; esaminare se queste due rette sono fra loro parallele.

Soluzione. Si faccia AE = AC, e BE = BC; si faccia inoltre BF = BD, ed AF = AD. Si osservi se la distanza dei due punti EC è eguale a quella degli altri due FD; se lo è, le due rette AB, CD saranno parallele; in caso diverso, esse convergeranno dalla parte della distanza minore.

Libro IV.

Delle rette e delle distanze proporzionali.

Definizioni.

131. Rapporto geometrico, o ragione geometrica è il numero delle volte che una data quantità contiene, o è contenuta in un'altra quantità della medesima specie. Come per esempio se una linea contiene, o è contenuta in un'altra linea, come pure se una superficie contiene, o è contenuta in un'altra superficie, un tal numero di volte esattamente.

132. Due rapporti eguali formano una proporzione. Se per esempio una retta A contiene, o è contenuta da un'altra retta B un numero di volte eguale a quello, che una terza retta C contiene, o è contenuta da una quarta retta D, queste quattro rette sono in proporzione, e si scrivono A : B :: C : D, che significa che la retta A sta alla retta B, come la retta C sta all'altra D; oppure A : B = C : D.

133. Le quantità espresse da A e da C, ovvero le rette A, C si dicono gli antecedenti della proporzione, e B, D i conseguenti. Le altre due quantità poi, o le altre due rette A, D si dicono gli estremi della proporzione, e B, C i medj. Finalmente la quantità, o la retta D si chiama inoltre quarta proporzionale alle altre tre A, B, C.

134. Una proporzione è composta di due rapporti, ed ogni rapporto di due termini. Così nella proporzione contemplata A, B sono i termini del primo rapporto, e C, D quelli del secondo.

135. I termini di un rapporto devono essere della medesima specie, come per esempio due rette A, B come abbiamo supposto; ma non è poi necessario che anche i due termini C, D del secondo rapporto debbano essere della medesima specie, cioè due rette, poichè una linea può stare ad un'altra linea, come una superficie sta ad un'altra superficie. Per ciò le altre due quantità espresse da C e da D, possono rappresentare due superficie, in vece che altre due rette.

136. Tre grandezze, come tre linee o tre superficie A, B, C, sono in proporzione quando il rapporto della prima A alla seconda B eguaglia quello della seconda B alla terza C. Tale proporzione si dice continua; e si scrive in questa maniera A : B : C, oppure A : B :: B : C. La quantità, ovvero la linea B chiamasi media proporzionale geometrica fra la prima A e la terza C. La quantità poi, o la linea C prende il nome di terza continuamente proporzionale alle due prime A, B.

137. Due rette, ovvero due superficie, o in generale due grandezze qualunque si dicono in ragione inversa o reciproca di due altre grandezze, allora quando la prima sta alla seconda, come la quarta sta alla terza.

138. Due rette, o due superficie, la prima delle quali sta alla seconda come 3 : 2 si dice che stanno in ragione sesquialtera; e subsesquialtera poi, quando stanno come 2 : 3.

139. Si dicono continuamente proporzionali quelle rette, o quelle superficie, e generalmente quelle grandezze nelle quali il rapporto della prima alla seconda è lo stesso che quello della seconda alla terza, che quello della terza alla quarta, e così di seguito.

140. Si dicono commensurabili tra loro quelle rette alle quali si può assegnare una comune misura. Si dicono poi incommensurabili quelle, che non hanno una misura comune.

Capitolo I. Delle Terze proporzionali.

Problema 25.

141. Trovare una terza proporzionale alle due rette date AB, CD, fig.a 54.

Soluzione. Col centro A, estremità della retta AB, e raggio AB, si segni un arco indefinito MBE. Quindi con raggio eguale all'altra retta CD, e centro B, si descriva il semicerchio EFGH, facendo, come si è detto, il raggio BE = EF = FG = GH. Questo semicerchio segando il primo arco descritto nel punto M, darà nella corda dell'arco segato MH, la terza proporzionale cercata.

142. Potrebbe darsi che la prima delle due rette date, ossia la AB, fosse minore della CD, ed anche minore della metà di quella. In questo caso servirà il problema seguente.

Prob.

Problema 26.

143. Trovare la terza proporzionale alle due rette AB, CD, fig.a 55., la prima delle quali AB è minore della metà della seconda CD.

Soluzione. Si duplichi la data AB (probl. 5.), facendo cioè AP doppia di AB. Quindi col centro P, e col raggio PA si segni l'arco indefinito MAE. Col centro E, e col raggio uguale alla seconda retta CD, si descriva il semicerchio EFGH, facendo cioè al raggio AE = EF = FG = GH. Si duplichi HM, e sarà HL, doppia di HM, la terza proporzionale cercata.

144. Osservazione. Se la retta AB sarà tanto minore della CD, che nemmeno duplicandola non si tagliassero gli archi MAE, EMH, o si tagliassero ad angoli troppo acuti, converrà allora triplicarla, e triplicare pure la MH per avere la terza proporzionale, che si ricerca.

Capitolo II. Delle quarte proporzionali.

Problema 27.

145. Trovare la quarta proporzionale alle date tre rette A, B, C, fig.a 56.

Soluzione. Da un punto arbitrario O come centro, e con raggi eguali alle due prime rette A e B (termini del primo rapporto della proporzione) si segnino due archi di cerchio indefiniti. Quindi presa la misura della terza retta C, si collochi questa come corda dell'arco di raggio eguale alla prima retta A, che nel caso nostro è l'esterno,

no, segnando sopra quest'arco i due punti L ed M. Ora con raggio arbitrario, per esempio LN, dai predetti due punti L, M come centri si facciano sull'arco interno, di raggio eguale alla seconda retta B, le due segnoni N, H. Sarà NH la quarta proporzionale alle tre rette date A, B, C, come si ricercava.

146. Avvertimento. Gioverà che il raggio arbitrario LN, col quale dai centri L ed M si fanno le segnoni HN sull'arco interno, sia tale, che la retta che si conduce fra L ed N formi col raggio ON dell'arco predetto un angolo LNO pressochè retto, il che si può fare ad occhio. Se inoltre la terza retta C non si potesse collocare come corda dell'arco LM, il che accadrà, quando C sarà maggiore di 2R, in tal caso si duplicheranno i raggi OM, ON dei due descritti archi, senza tema di differenti risultati.

Capitolo III. delle medie proporzionali geometriche.

Problema 28.

147. Trovare la media proporzionale geometrica tra le due date rette AB, CD, fig.ª 54.

Soluzione I.ª. Alla data retta AB si aggiunga la CD, da B in E, e nel suo prolungamento (probl. 1.). Si divida per metà la AE col punto F (probl. 10). Si faccia BG = AF; quindi dai punti F ed F come centri, e con raggio FG si segnino due archi, che si taglino in M. Sarà BM la media proporzionale cercata.

Sola=

Soluzione II.ª Si uniscano le date due rette AB, CD, fig.ª 58 in una sola e medesima retta AE. Si divida la retta AE per metà col punto F, e da questo punto come centro, con raggio FE si descriva il semicerchio EMA. Quindi dal punto B, unione delle rette proposte, s'innalzi la retta BM normale alla EA (problema 2). Sarà BM la media cercata.

Capitolo IV. Della divisione delle rette in parti proporzionali.

Problema 29.

148. Dividere due date rette AB, CD, fig.ª 59, in modo, che le divisioni loro sieno proporzionali.

Soluzione. Da un punto arbitrario O come centro, e coi raggi AB, CD si descrivano due archi di cerchio concentrici indefiniti MN, PQ. Quindi da uno di questi archi, per esempio dall'arco esterno di raggio AB, si tagli un arco qualunque a piacere, la cui corda differisca dalla retta AB di una quantità qualunque, e sia questo l'arco MN. Dai due punti M, N come centri, con raggio arbitrario, si facciano sull'arco interno le due sezioni RQ. Ora, se dalla retta CD si taglierà una parte DF eguale alla corda dell'arco PQ, sarà la CD divisa nelle due parti DF, FC proporzionale alle parti nelle quali fu divisa la AB. Si avrà cioè BE : EA :: DF : FC ; BA : EA :: DC : FC ec.

Prob

Problema. 30. 7.°

149. Dividere una data retta AB, fig.ª 60. nei medesimi rapporti o ragioni, nelle quali è divisa un'altra retta data CD. . . . . .

Soluzione. Da uno stesso punto O preso ad arbitrio ad uno estremo, e con raggi eguali alle due rette proposte, si descrivano due archi indefiniti GHK, LMN. Quindi segna l'arco di raggio eguale alla CD, si collochino successivamente come le corde le misure delle parti CF, FE, ED nelle quali è divisa la CD, facendo nel predetto arco le sezioni G.H.I.K. Quindi da questi punti di sezione G,H,I,K come centri, e con raggio arbitrario si facciano sull'arco estremo, di raggio eguale ad AB, le successive sezioni L, M, N, R. Le corde degli archi LM, MN, NR saranno le divisioni da darsi nella data retta AB, i rapporti delle quali saranno eguali a quelli delle divisioni della proposta CD, come si ricercava.

Problema 31.

150. Da una data retta AB, fig.ª 61, tagliarne una parte tale, che sia media proporzionale fra la parte rimanente di essa ed un'altra retta data CD.

Soluzione. Alla data AB si aggiunga la AE=CD nel prolungamento della AB (probl. 7.). Si trovi la AM media proporzionale fra le due AB, AE (probl. 28). Quindi si divida AE per metà in N (probl. 7. e 11.), e da questo

com-

come centro, con raggio NM si faccia sopra la AB la sezione P. Sarà AP la media proporzionale cercata, fra la data retta CD e la PB, parte rimanente della AB, come si ricercava.

Problema 32.

151 Dividere una data retta AB, fig.ª 62, in due parti tali, che il quadrato della parte maggiore eguagli il rettangolo di tutta la retta nella parte minore, ossia dividerla in media estrema ragione.

Soluzione. Col centro A, e raggio AB, si descriva il semicerchio BCDE. Quindi con raggio BD, dai punti B ed E come centri si segnino due archi, che si taglino in a. Presa per raggio la distanza dei due punti Aa, da D come centro, si faccia sulla AB la sezione b. Sarà b il punto della divisione cercata.

Capitolo V.°

Delle rette che si tagliano, e di quelle che concorrono in un punto incognito.

Problema 33.

152. Dati due punti AB di una retta, e due CD di un'altra, fig.ª 63., trovare il punto M, in cui le date due rette si tagliano.

Soluzione. Dai due punti appartenenti ad una delle due rette proposte, per esempio A, B come centri, e con raggi eguali alle rispettive distanze di questi dai punti

CD

C, D dell'altra, si descrivano quattro archi, che passino per i punti predetti C, D e si taglino in altri due punti F, E. Ora, considerando i tre punti F E D come tre vertici di un parallelogrammo, si trovi il quarto vertice G, facendo cioè a DE = FG, e ad FE = DG. Si trovi la quarta proporzionale alle tre CG, CD, CF (problema 24). Con questa quarta proporzionale presa per raggio, e coi centri C ed F si descrivano due archi, che si taglino in M. Sarà M il punto in cui si tagliano le due rette proposte, come si ricercava.

Problema 34.

153. Dati due punti A, B di una retta, cioè C, D di un'altra, fig.a 64., le quali due rette concorrono in un punto incognito, trovare questo punto.

Soluzione. Da due dei punti appartenenti ad una delle proposte rette, per esempio dai punti A, B come centri, e con raggi eguali alle rispettive distanze di questi dagli altri due C, D dell'altra, si descrivano quattro archi, che passino per i punti predetti C, D, e si taglino in altri due punti F, E. Considerati i tre punti C, D, E come vertici di un parallelogrammo, si trovi il quarto vertice G, facendo cioè a CD = EG, e DE = CF. Si trovi la quarta proporzionale alle tre FG, FE, FC (problema 24). Trovata la quarta proporzionale, si prenda questa per raggio e dai due punti A, B come centri si descrivano due archi, che si taglino in un punto M. Sarà questo il punto in cui con-

corrono

le due rette ~~date~~ proposte, cioè il punto cercato.

Problema 35.

154. Date due rette AB, CD, fig.a 65., concorrenti in un punto inoguito; trovare due punti tali, che la retta che li congiunge per essi divida per metà l'angolo formato dalle proposte due rette AB, CD nel punto del loro incontro.

Soluzione. Da due punti qualunque di una delle proposte rette, per esempio dalle estremità A, B della retta AB come centri, e con raggi eguali alle rispettive distanze di questi dalle due estremità C, D dell'altra retta (o da due altri punti qualunque presi sopra la stessa), si descrivano quattro archi, de' quali due passino per C e si taglino in F, ed altri due per D e si taglino in un altro punto E. Quindi, congiunta per le due sezioni C, F una retta, ed un'altra per le altre due sezioni D, E, queste due rette tagliano la AB nei due punti G, H. Si dividano per metà le due distanze o le due rette GC, HD con punti L ed M. Saranno questi i punti cercati, quelli cioè per i quali conducendo una retta LM, questa dividerà per metà l'angolo formato dalle proposte AB, CD nel punto del loro incontro. . . . . .

Problema 36.

155. Date due rette AB, CD, fig.a 66., concorrenti in un punto inoguito: e dato un punto L situato comunque

entro

entro dello spazio da esse rette compreso, trovare un altro punto M tale, che, conducendo per L ed M una retta, e producendola all'infinito della quale passare per lo stesso punto, nel quale concorrono le due rette AB, CD proposte.

Costruzione). Dalle due estremità A e B, o da due altri punti qualunque della stessa AB, come centri, e con raggi eguali alle rispettive distanze da questi agli altri due punti L ed D si segnino quattro archi, due dei quali passino per L e si taglino in F, ed altri due per D e si taglino in E. Si guidino le rette ED, FL producendo quest'ultima finchè incontri in G la retta data CD. Si trovi la quarta proporzionale alle tre GL, HD, GL, ed a questa quarta proporzionale di fatto eguale la HM. Sarà il punto M il cercato, e la retta, che dal dato punto L si conduce per M dovrà passare per lo stesso punto incognito nel quale concorrono le due rette AB, CD proposte.

136. Osservazione. Se il punto L è in vece che trovarsi nello spazio compreso dalle due rette AB, CD si trovasse fuori dello spazio medesimo, come lo è il punto P della stessa figura 66; la costruzione del problema sarà in tutto simile alla precedente, colla sola differenza che gli archi, che si tagliano in L ed F, saranno in questo caso descritti coi raggi AP, BP: che inoltre al ~~quarto~~ terzo termine GL della istituita proporzione si sostituirà GP,

GP, che trovata la quarta proporzionale alle tre GQ, HQ, GP si dovrà questa portare da H sul prolungamento della HQ oltre Q.

Libro V

Della costruzione delle figure rettilinee, e dei poligoni regolari.

Capitolo I.

159. Nel Libro I. § 31 parlando delle superficie circoscritte da linee rette, abbiamo detto che per formare una figura o una superficie rettilinea occorrono almeno tre linee rette. Ora vedremo come si costruisca quella figura, essendo dati i suoi lati; e come inoltre data una data si costruisca qualunque poligono regolare, tra quelli che si possono iscrivere e circoscrivere al cerchio.

Problema 37.

158. Date le tre rette AB, CD, EF, fig.a 64, per lati di un triangolo da costruirsi sopra una di esse presa per base, per esempio sopra la AB, costruire il triangolo.

Soluzione. Dalle due estremità A, B della retta AB, come centri, e coi raggi rispettivamente eguali agli altri due lati CD, EF si segnino due archi, che si taglino in G; sarà G il terzo vertice del triangolo da costruirsi. Se si guidano per ciò le rette GA, GB, il trian-

golo

rimettante ABC sarà il cercato.

159. Osservazione. Se la somma di due qualunque dei lati dati fosse minore od anche eguale al terzo lato, la soluzione del problema sarebbe impossibile. Da ciò ne viene che, per poter costruire il triangolo, è necessario che due dei suoi lati presi insieme superino sempre il terzo lato.

Problema 38.

160. Dati due lati contigui AB, CD di un parallelogrammo, fig.a 68., e l'angolo M da essi compreso, costruire il parallelogrammo.

Soluzione. Dal vertice M dell'angolo dato come centro, e con raggio eguale al dato lato CD, si descriva un arco che tagli i lati dell'angolo nei punti G, H. Collo stesso raggio, e col centro A, si descriva un arco che tagli in N l'altro lato AB, e si faccia l'arco NE eguale all'arco GH. Quindi col centro E, e col raggio AB, si descriva un arco due passi per Z; e con raggio AE, e col centro B si tagli in Z l'arco predetto. Saranno A, B, Z, E i vertici del parallelogrammo cercato.

Capitolo II.

Della costruzione dei Poligoni regolari sopra lati Dati.

Problema 39.

161. Sopra un dato lato AB, fig.a 69, costruire un poligono regolare di tre lati, ossia un triangolo equilatero.

Solu=

Soluzione. Dalle due estremità a e B del proposto lato come centri, e con raggio AB, si descrivano due archi, che si taglino in C. Saranno A, C, B i vertici del poligono regolare, o triangolo equilatero cercato.

Problema 40.

162. Sopra un dato lato AB, fig.a 70, costruire un poligono regolare di quattro lati, ossia un quadrato.

Soluzione. Col centro A e col raggio AB si descriva il semicerchio BCDE, facendo, come molte volte si è detto, il raggio AB=BC=CD=DE. Quindi da B ed E come centri, e con raggio BD, si descrivano due archi, che si taglino in un punto a; presa per raggio la distanza dei punti Aa, da B come centro si faccia sul semicerchio la sezione F. Finalmente con raggio AB, e coi centri B ed F si descrivano due archi, che si taglino in G. Saranno A, B, G, F i vertici del quadrato cercato.

Problema 41.

163. Sopra un dato lato AB, fig.a 71, costruire un poligono regolare di cinque lati, ossia un pentagono regolare.

Soluzione. Col centro A, e con raggio AB si descriva il semicerchio BCDE, e si faccia a BD=Ba=Ea. Con raggio Aa, e col centro D si faccia sulla AB la sezione b. Quindi con raggio Eb, e col centro A si descrivi un arco indefinito, che tagli pei due punti F e G, e collo stesso raggio, e centro in B, si tagli l'arco descritto nel punto G, ed

il

il semicerchio in H; da questo punto H come centro, e collo stesso raggio Eb si tagli l'arco FG in F. Saranno A, B, F, G, H i vertici del pentagono regolare cercato.

Problema 42.

164. Sopra un dato lato AB, fig.ª 72, costruire un poligono regolare di sei lati, ossia un esagono regolare.

Soluzione. Col raggio AB, e coi centri A e B si segnino due archi, che si taglino in un punto O. Collo stesso raggio AB, e col centro O si descriva il cerchio BDF, e tutta periferia di questo, si faccia al raggio AB = BC = CD = DE = EF. Saranno A, B, C, D, E, F, i vertici dell'esagono regolare cercato.

Problema 43.

165. Sopra un dato lato AB, fig.ª 73, costruire un poligono regolare di otto lati, ossia un ottagono regolare.

Soluzione 1.ª Con raggio AB, e coi centri A e B, si descrivano le due semicirconferenze BCDE, ACde facendo cioè al raggio AB = BC = CD = DE = AC = cd = de. Si faccia inoltre a BD = Ba = Ea = Aá = eá. Con raggio AB, e col centro a si tagli il semicerchio BCDE nel punto H, e collo stesso raggio, e col centro á si tagli l'altro semicerchio ACde in G. Quindi collo stesso raggio AB, e coi

centri

centri K e G si segnino due archi, che passino per i punti L e K'. Col raggio 63a, e col centro a si tagli l'arco, che passa per K', e dal centro á, e col raggio stesso si tagli l'altro arco che passa per L'. Col raggio AB, e coi centri K' ed L', si segnino due archi, che passino per i punti M e N'. Finalmente con raggio Aa, e col centro á si tagli l'arco, che passa per M', e collo stesso raggio, e col centro á si tagli l'altro, che passa per N'. I punti d'intersezione A, B, G, K', M, N', L', H saranno i vertici dell'ottagono regolare cercato.

Soluzione II. Col centro A, fig.a 74, e col raggio AB si descriva il semicerchio BCDE, e si faccia a BD = Ba = Ea. Dal centro a, con raggio AB si tagli il semicerchio BCDE in H. Quindi con raggio H3 B, e col centro a si segni un arco, che passi per G, e con raggio AB e col centro B si tagli l'arco predetto in G. Quindi con raggio HG, e col centro H si segni un arco, che passi per M, e collo stesso raggio, e col centro G un altro, che passi per N'; col raggio HG= lo HB, e coi centri A e B se ne segnino altri due, che passino per K' e per L'. Finalmente con raggio BH, col centro B si tagli l'arco che passa per K': al raggio stesso, e col centro G si tagli quello, che passa per M': e successivamente da K' e da M come centri, e col raggio stesso si taglino i due ultimi, che passano per N' e per L'. Nelle sezioni degli archi predetti si avranno, come nella Soluzione prima, i vertici dell'ottagono regolare cercato.

Soluzione III. Con raggio AB, fig.ª 75, e col centro A descritta, come nelle altre soluzioni, la semicirconferenza BCDE: fatta a BD = Ba = Ea, e determinato il punto H; con raggio HE, e coi centri A ed E si leghino due archi, che si taglino in F, e da questo come centro, e col raggio stesso si tagli il semicerchio nel punto G. Quindi con raggio BG, e coi centri B ed H, si leghino due archi, che si taglino in O. Da questo punto O come centro, e collo stesso raggio OE, si descriva un cerchio, la periferia del quale passerà pei punti B a H, e nella periferia di questo si faccia ad AB = BK = KL = LM = MN = NP = PH; saranno A, B, K, L ec.; i vertici dell'Ettagono regolare cercato.

Problema 44.

166. Sopra un dato lato AB, fig.ª 76, costruire un poligono regolare di dieci lati, ossia un decagono regolare.

Soluzione. Col centro A, e con raggio AB si descriva il cerchio BDE, e si faccia a BD = Ba = Ea. Con raggio Aa, e col centro d si tagli il dato lato AB in b. Quindi con raggio Eb, e coi centri B ed A, si leghino due archi che si taglino in O. Collo stesso raggio Eb, e col centro O, si descriva il cerchio BHN, e nella circonferenza di questo si faccia ad AB = BF = FG = GH, ec.; delle quali lezioni l'ultima G coinciderà con quella dei due cerchi descritti. Saranno A, B, F, G, H, K ec.; i vertici del decagono regolare cercato.

Prob.

Problema 45.

167. Dati i due vertici opposti, ossia la diagonale AB, fig.ª 77, di un quadrato, trovare gli altri due vertici, mediante i quali costruire intorno alla data diagonale il quadrato.

Soluzione. Con raggio AB, e col centro A si descriva il semicerchio BCDE, e si faccia a BD = Ba = Ea. Col centro B, e con raggio BA si segni l'arco indefinito CP, e dal centro E, con raggio Aa si tagli il predetto arco in P. Finalmente con raggio AP, e coi centri A e B, si segnino due archi, che si taglino nei due punti L ed M. Saranno questi i vertici cercati, i quali congiunti agli altri due A, B mediante le rette LB, La, MB, MA, il risultante quadrato AMBL sarà quello, che fa proposto di costruire intorno alla data diagonale AB.

Libro VI.

Della divisione della circonferenza e degli archi del Cerchio.

Problema 46.

168. Dividere la circonferenza di un dato cerchio BCDE, fig.ª 78, in due parti eguali.

Soluzione. Da un punto qualunque B, preso a piacere sulla circonferenza del dato cerchio, e con raggio AB eguale a quello del cerchio dato, si facciano sulla circonferenza le

tre

tre successive segnani C, D, E. Saranno B, E i punti, che dividono in due parti eguali la circonferenza del dato cerchio.

16) Osservazione. Essendo il raggio di un cerchio qualunque la corda dell'arco eguale alla sesta parte della circonferenza del cerchio medesimo, ed essendo BC, CD, DE tre sesti parti della circonferenza, dunque BCDE sarà eguale alla metà della circonferenza del cerchio dato, ossia un semicerchio. Se si congiungeranno i due punti B E con una retta, questa necessariamente dovrà passare per il centro A del cerchio.

Problema 47.

170. Dividere la circonferenza di un cerchio BGD del fig. 79, in quattro parti eguali.

Soluzione. Preso sulla circonferenza del cerchio dato un punto B qualunque, da questo come centro, e col raggio AB del cerchio medesimo, si tagli la circonferenza nei due punti C, c; si faccia inoltre al raggio AB = CD = DE = Ed. Quindi con raggio BD, e coi centri B ed E si descrivino due archi, che si taglino in a. Finalmente con raggio Aa, e col centro B si tagli la circonferenza nei due punti F ed f. Saranno B, F, E, f i punti della divisione cercata.

171. Con tre date aperture di compasso AB, BD, abbiamo già diviso la circonferenza del dato cerchio in due parti eguali nei punti B ed E, come nell'antecedente pro-

blema,

in tre parti eguali nei punti B, D, d, in quattro parti eguali nei punti B, 7, E, f; ed in sei parti eguali nei punti B, C, D, E, d, c.

172. Osservazione. Essendo gli archi B7, 7E quarte parti della circonferenza, ed essendo gli altri archi BC, CD, DE seste parti della medesima: per ciò se dai due archi eguali B7, 7E, si levano gli eguali BC, DE, gli archi rimanenti saranno eguali; essendo poi CD una sesta parte della circonferenza, sarà C7 la sua metà, cioè una duodecima parte della circonferenza medesima. Per la qual cosa nella costruzione del presente problema si hanno pure i quattro archi 7C, 7d, fc, fd duodecime parti della circonferenza, come si vedrà nel problema che segue.

Problema 48.

173. Dividere la circonferenza del cerchio BCDd, fig.a 49, in dodici parti eguali

Soluzione. Stante la divisione fatta per il precedente problema 47., col raggio dB, e coi centri g ed f si facciano sulla circonferenza le sezioni N, C, n, o: e sarà la circonferenza divisa nei punti B, N, C, 7, D, O, E, o, d, f, c, n in dodici parti eguali. Poichè l'arco B7, come abbiamo veduto, è uguale ad una quarta parte della circonferenza, e l'arco 7N ad una sesta parte; sarà dunque $BN = B7 - N7 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{6-4}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Prob=

Problema 49.

174. Dividere la circonferenza del cerchio BDd, fig.ª 79, in otto parti eguali.

Soluzione. Fatta la divisione come all'antecedente problema 47., col raggio AB, e col centro a, si tagli la circonferenza nei due punti G ed H. Quindi da questi punti G, H come centri, e con raggio Aa, si facciano sulla circonferenza le altre due sezioni g ed h; sarà la circonferenza divisa in otto parti eguali nei punti B, G, F, H, E, h, f, g.

Problema 50.

175. Dividere la circonferenza del cerchio BDd, fig.ª 79, in sedici parti eguali.

Soluzione. Stante la divisione attenuta colle costruzioni dei tre antecedenti problemi 47, 48 e 49.; dai quattro punti G, H, h, g come centri, e con raggio AB si facciano sulla circonferenza le sezioni K, I, L, M, m, l, i, k; e sarà divisa la circonferenza in sedici parti eguali. Poichè le dagli archi eguali GF, GB si levano gli eguali CF, NB, gli archi rimanenti GC, GN saranno eguali; ma l'arco CN è una duodecima parte della circonferenza, dunque gli archi GC, GN, che sono metà dell'arco CN, saranno sedicesime parti della circonferenza medesima.

Problema 51.

176. Dividere la circonferenza del cerchio BDd, fig.ª 80, in quat=

guarantotto parti eguali

Soluzione. Divisa la circonferenza del dato cerchio in ventiquattro parti eguali, come al problema antecedente; con raggio aN, e coi centri B ed E si segnino dentro il cerchio due archi, che si taglino in e. Quindi col raggio AB, e col centro e, si facciano sulla circonferenza le due sezioni a', b', le quali divideranno gli archi NK, MO in due parti eguali; per ciò gli archi a'K, a'N, b'O, b'M saranno guarantottesime parti della circonferenza.

Ora per dividere in due parti eguali tutti i rimanenti archi; con raggio AB si cominci dal trovato punto a', e si divida la circonferenza in sei parti, segnando i punti di divisione c', d', e', f', g'; i quali bipartiranno gli archi JI, HO, mo, lf, gn; quindi collo stesso raggio AB cominciando dal punto b', si bipartiranno gli altri archi JL, NS, nK, if, ho, dividendo come prima la circonferenza in sei. Quindi con raggio Aa, cominciando dai medesimi punti a', b' si divida la circonferenza in quattro parti eguali, segnando i punti di divisione, i quali bipartiranno gli archi Ld, mo, ic, JC, nK, ld. Finalmente con raggio AB, cominciando dai due ultimi punti di divisione o', q si divida la circonferenza in sei parti eguali, e segnando i punti di divisione u, t, n', s, r, v, x, p', y, z, questi bipartiranno i rimanenti archi KB, GC, LD, ME, hd, cg, BR, CI, DH, Em; e si avrà così diviso la circonferenza in guarantotto parti eguali, come fu proposto.

Prob.

Problema 52.

177. Dividere la circonferenza del cerchio BBd, fig.a 81, in parti cinque eguali.

Soluzione. Divisa la circonferenza del dato cerchio in quattro ed in dodici parti eguali, come ai problemi 47 e 48., col raggio Aa, e coi centri N ed O di legnino dentro il cerchio due archi, che si taglino in un punto b; quindi con raggio Bb, e col centro B si tagli la circonferenza nel punto 2. Sarà l'arco $B2$ la quinta parte della circonferenza cercata. Per ciò ripetendo il raggio Bb cinque volte intorno la circonferenza, e segnando i punti 2, 5, 3, 9; saranno questi i punti della divisione cercata.

Problema 53.

178. Dividere la circonferenza del cerchio BBd, fig.a 81, in dieci parti eguali.

Soluzione. Stante la divisione come nel problema antecedente, si faccia ad $Bb = BP$, e sarà $BP = P2$, archi eguali alla decima parte della circonferenza.

179. Osservazione. Essendo poi l'arco $BC = \frac{1}{6}$, e l'arco $BP = \frac{1}{10}$ della circonferenza: se dal primo si leverà il secondo, l'arco rimanente PC sarà una quindicesima parte della circonferenza; poichè $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{10-6}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$. Di più, se dall'arco CV duodecima parte della circonferenza, si leverà l'arco CP, si avrà $NP = CV - CP = \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{15-12}{180} = \frac{3}{180} = \frac{1}{60}$.

180. Laonde volendosi Dividere la circonferenza del cerchio in sessanta parti eguali: batterà con apertura di compasso eguale ad AB, dividere la circonferenza in dieci parti cominciando prima dal punto e; quindi di comincierà dal punto B, e colla stessa apertura di Dividerà come prima la circonferenza in dieci parti; e così di seguito cominciando dal punto n, poi dal punto c, quindi da f, e per ultimo dal punto d: e sarà così divisa la circonferenza in sessanta parti eguali.

181. Dividendo la circonferenza in parti sessanta, si ottiene pure la divisione in parti trenta: poichè gli archi di due sessantesime sono eguali ad una trentesima parte della circonferenza: quelli di tre sessantesime ad una ventesima. e quelli di quattro d'una quindicesima parte della circonferenza.

182. Rispetto poi alla divisione della circonferenza in venti parti eguali, vedremo nel problema che segue, come, indipendentemente dall'arco di tre sessantesime, si determini l'arco della ventesima parte della circonferenza.

Problema 54.

183. Dividere la circonferenza del cerchio BDd, fig.a 31, in venti parti eguali, ossia determinare l'arco della ventesima parte di essa.

Soluzione I.a Stante la divisione della circonferenza come nel problema 52, nel quadrante Bf, si divida a B = fV. Sarà l'arco BV una ventesima parte della circonferenza.

za. Poichè è $BV = Bf - fV = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}$.

Soluzione II.ª Stante la divisione come allo stesso problema 52.: nel quadrante Bf si faccia ad $AB = BV$; cioè col raggio AB, e col centro b si faccia nel quadrante Bf la sezione V. Sarà l'arco BV una ventesima parte della circonferenza.

Quantunque i problemi fin qui rivolti relativi alla divisione della circonferenza del cerchio, possano bastare pegli usi ordinarj delle arti; pure potendo darsi il caso, che l'artista si trovi nel bisogno di dividere la circonferenza di un cerchio in un numero di parti maggiore di quelli nei quali si è divisa nei problemi precedenti, perciò stimo utile, per questi casi particolari, l'aggiunta dei due seguenti problemi, nei quali propongo di dividere la circonferenza di un cerchio, prima in parti centoventi, quindi in duecento quaranta.

Problema 53.

184. Dividere la circonferenza del cerchio BDd, fig.ª 81, in centoventi parti eguali.

Soluzione. Stante le divisioni come ai problemi 50 e 52, sarà l'arco $2V$ una centoventesima parte della circonferenza.

Dimostrazione. Essendo l'arco BV eguale a cinque ventiquattresime parti della circonferenza (problema 50), e l'arco $B2$ eguale ad una quinta parte (problema 52), sarà per ciò $2V = BV - B2 = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25-24}{120} = \frac{1}{120}$.

Con

Con quattro sole aperture di compasso, ovvero con quattro compassi, e con due sole punte a, b presi fuori della circonferenza, si può dunque dividere la circonferenza del cerchio in centoventi parti eguali.

Poichè col punto a, e con tre aperture di compasso avendo divisa la circonferenza in ventiquattro parti eguali (problema 50), ed avendo trovato il punto b (problema 52); si faccia ad AB = 63P = P2 = 2R = RS, a cui darà pure eguale SE (problema 53). Ora, per dividere l'arco NS in cinque parti eguali, ciascuna delle quali sarà una centoventesima si faccia ad AB = Lg' = gp = Ir = Os' = tu = ut. Si avrà diviso l'arco NS in cinque parti eguali. Nello stesso modo dividendo tutti gli altri archi SO, OI, IT, TL ec., si avrà divisa la circonferenza in centoventi parti eguali, poichè essendo NS una ventesima quarta parte della circonferenza (problema 50), sarà ogni sua quinta parte una centoventesima della circonferenza stessa.

Problema 56.

185. Dividere la circonferenza del cerchio BAD, fig.a 81, in duecentoquarantadue parti eguali.

Soluzione. Fatta la divisione come al problema 55, si trovi il punto e, nel modo indicato al problema 51, e da questo punto e come centro, con raggio AB si tagli la circonferenza nel punto v; quindi cominciando da questo punto v si facciano, collo stesso raggio AB, le due successive sezioni

x, z. Saranno i due archi Pz, zr ciascuno una duecento-quarantesima parte della circonferenza.

Dimostrazione. Poichè sottraendo dalle due metà Nz, zG gli archi eguali NP, rG; resterà Pz = zr. Ma Pr è una centoventesima parte della circonferenza; e Pz, zr sono due metà: dunque ciascuno dei due archi Pz, zr saranno eguali alla duecentoquarantesima parte della circonferenza medesima.

186. Con una apertura di compasso presa dal punto z ad un qualunque punto, per esempio N, della divisione già ottenuta nel problema 55, si potrà proseguire a dividere in due tutte le parti centoventesime di quel problema. Per esempio colla predetta apertura di compasso fatto centro in p si dividerà l'arco rt; fatto centro in P si dividerà l'arco tG, e così via via.

Capitolo II.°

Della divisione degli archi di cerchio.

Problema 110. 57. 42

187. Dividere un arco di cerchio BC, fig.a 82, in due parti eguali, conoscendosi il centro A, dal quale fu descritto.

Soluzione. Col raggio AB, col quale fu descritto l'arco dato, e coi centri B e C, punti estremi dell'arco, si descrivano gli archi Ad, AE. Si faccia a BC = Ad = AE. Coi centri d, E, e con raggio DC, si descrivano due archi, che si taglino in F. Con raggio AF, e dai medesimi centri

d, E

D, E di seguino due archi, che si taglieranno in G. Sarà il punto G nella circonferenza del cerchio descritto dal centro A con raggio AB, e sarà l'arco BG = GC.

138. Se l'arco dato fosse assai piciolo, per esempio bc, sarà meglio in pratica aggiungere di qua, e di là archi eguali un poco più grandi, come Bb, cC, e tagliare poi per mezzo l'arco bBC in G, dal qual punto sarà pure diviso per metà l'arco bc. Se al contrario l'arco da dividersi fosse troppo grande, come PQ2, sarebbe spediente toglier da esso di qua, e di là archi eguali P3, 2C, acciocchè riuscisse mediocre l'arco di mezzo 3C, quindi dividere questo per metà in G, nel qual punto resterà pure diviso per metà l'arco P32.

Cinque giunti, mercè il metodo dell'immortale Geometra Lorenzo Mascheroni, a dividere col solo compasso la circonferenza del cerchio in tutte quelle parti eguali, che dagli Antichi si ottenevano coll'iscrivere al cerchio i cinque poligoni regolari, triangolo equilatero cioè, quadrato, pentagono, esagono e decagono, impiegando insieme il compasso e la regga: ed abbiamo il mezzo di dividere qualunque arco di cerchio in due parti eguali.

Prima però di passare ai problemi del settimo libro, stimai far cosa utile al giovane avvisarlo terminando questo sesto libro con un avvertimento relativo alla pratica, e molto più mi indusse a ciò il considerare, che da nessun altro mai, ch'io sappia, era stato toccato.

Avver-

Avvertimento.

Taluno eseguendo la costruzione dei problemi esposti in questa Geometria, e non ottenendo risultati di tutta precisione, potrebbe forse supporre fallacia nel metodo. Si persuada però che qualunque fosse l'inesattezza che avesse potesse in simili costruzioni, dev'egli attribuirla all'oscillazione delle gambe del compasso, le quali non lo vi permettono nella loro apertura: e molto più poi alla imperfezione degli occhi e della mano dell'operatore, che ingannano sempre, e principalmente quando si tratta dell'ultima differenza di precisione geometrica.

Talvolta credesi centrare la punta del compasso nel preciso punto, e la punta non coincide con quello; siamo altra volta persuasi di aver determinato la precisa apertura delle due gambe, e questa varia in vece maggiore o minore di quella che si ha da prendere. In fine, non è mai sufficiente la diligenza e l'attenzione di chi praticamente costruisce un problema di Geometria, per evitare quelle imperfezioni, che sono inseparabili dalle umane operazioni.

Per ottenere però risultati quanto più di può prossimi all'esattezza Geometrica, avverta l'artista: ch'è d'uopo ch'egli sia provvisto di compassi a quadrante, o a verga, detti comunemente compassi fedeli. E poichè nelle costruzioni con questo metodo, varie sono

le

le aperture di compasso, che nelle costruzioni descritte abbisognano alternativamente, così meglio sarà che egli abbia più di uno dei detti compassi fedeli.

Libro VII.

Capitolo I.

Dei poligoni regolari ed irregolari iscritti e circoscritti al cerchio, e dei centri.

Problema 58.

189. Iscrivere ad un dato cerchio un poligono regolare tra quelli, che si possono iscrivere ad esso.

Soluzione. Si divida la circonferenza del cerchio dato in un numero di parti, eguali al numero dei lati del poligono da iscriversi. I punti di divisione della circonferenza saranno i vertici del poligono regolare cercato, e le corde degli archi saranno i lati del poligono medesimo.

190. Quindi incentoquarantadue le parti nelle quali con tre soli punti presi fuori della circonferenza, si può essa dividere (problema 36) con dei aperture di compasso al più; tanti saranno i poligoni regolari, che con questi tre punti e con misurare di compasso si potranno iscrivere al cerchio, quanti sono i numeri che dividono esattamente il 240. Ora questi numeri sono 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240.

191. Dunque ammettendo il 2, si potrà iscrivere nel dato cerchio

un

un poligono regolare di tre lati, di 4, di 5, di 6, di 8, di 10 ec. sino al poligono di 240 lati.

192 Se il numero dei lati del poligono che di vuole inscrivere, si trovasse essere uno di quelli, pei quali si è divisa la circonferenza ai problemi 47 sino al 56 inclusivi, per esempio il 12, si divida la circonferenza in 12 parti eguali (probl.a 48); i due punti estremi di ciascuna di queste parti saranno i vertici degli angoli del poligono che di vuole inscrivere; ossia, ciò che è lo stesso, le corde di questi archi saranno i lati del poligono.

193. Se poi il numero dei lati del poligono che di vuole, non si trovasse espressamente nei già ridotti problemi, relativi alla divisione della circonferenza del cerchio: come, per esempio, se di volesse costruire un poligono di sessanta lati; si duplichi, si triplichi, o si quadruplichi ec. il dato numero, finchè si arrivi ad avere uno dei numeri, che si contengono espressamente nei problemi; nell'esempio addotto si duplichi il sessanta e si avrà 120, il qual numero si trova espressamente al problema 55, dove si dà il modo di dividere la circonferenza in 120 parti eguali. Queste parti, come abbiamo osservato al §. 181, prendendole a due a due, ci somministreranno sessanta archi eguali; le corde di questi archi saranno i sessanta lati del poligono che si voleva. Se si avesse dovuto triplicare il numero, come nel caso, che si fosse voluto un poligono di 16 lati; divisa allora la circonferenza del cerchio da-

to

to in 48 parti (probl: 51), numero triplo del sedici, si dovranno prendere tre di questi archi, per avere un arco, che sia la sedicesima parte della circonferenza; ogn'uno di questi archi eguali, avrà per corda un lato del poligono di sedici lati, e di sedici angoli.

Capitolo II.°

Dei poligoni regolari circoscritti al cerchio.

Problema 59.

191. Dato un cerchio BDd, fig.ª 83; circoscrivere ad esso un poligono regolare di tre lati, cioè un triangolo equilatero.

Soluzione. Si faccia al raggio AB = BE = Ed. Si faccia inoltre a BD = Bd = DL = DN = dN = dM. I tre punti L, M, N saranno i vertici del triangolo equilatero circoscritto al cerchio BDd, come si voleva.

Problema 60.

195. Al dato cerchio BFED, fig.ª 84, circoscrivere un quadrato.

Soluzione. Si divida la circonferenza del cerchio dato in quattro parti eguali (probl. 47). Da questi punti di divisione B, F, E, D come centri, e con raggio AB, si descrivano degli archi, che si taglino nei punti L, M, N, O. Saranno questi punti i vertici del quadrato cercato, circoscritto al cerchio.

Prob-

Problema 61. 45

196. Ad un dato cerchio BCDE7, fig.ª 85, circoscrivere un poligono regolare di cinque lati, ossia un pentagono regolare.

Soluzione. Si divida la circonferenza del cerchio dato in cinque parti eguali (prob.ª 52.), nei punti B,C,D,E,7. Fatto centro in uno di questi punti, per esempio in 7, con raggio 7B si descriva il semicerchio B3D. Quindi dal punto D, opposto al punto 7, come centro, e con raggio D7 si tagli l'arco B3 in 2. Finalmente con raggio P2, e coi centri B,C,D,E,7 si segnino degli archi, che a due a due si taglino nei punti b,c,d,e,f. Saranno questi punti i vertici del pentagono regolare circoscritto al cerchio BCDE7, come fu proposto.

Problema 62. 46

197. Dati i vertici di un poligono regolare qualunque BCDE7, fig.ª 86, iscritto in un cerchio BDE7; trovare i vertici di un simile poligono regolare circoscritto allo stesso cerchio.

Soluzione. Da uno qualunque dei vertici dell'iscritto poligono, per esempio dal vertice C come centro, e con raggio eguale alla distanza di due di essi CB, si descriva il semicerchio BDP. Dai due punti B,C come centri, e con raggio BD si segnino due archi, che si taglino in V. Collo stesso raggio BD, e col centro V si tagli la semicirconferenza BDP nel punto 2. Quindi con raggio P2, e coi centri B,C,D,E,7, ec., vertici del poligono iscritto, si segnino degli archi, che si taglino nei punti b,c,d,e,f, ec. Questi saranno i vertici del pol-

poligono regolare circoscritto al Dato cerchio BD7, e simile all' iscritto, come fu proposto.

198. Osservazione. Nel caso del pentagono regolare, fig.a 85, il punto 2' coinciderebbe col punto D.

Capitolo III.°

Dei poligoni irregolari iscritti al Cerchio.

Problema 63.

199. In un Dato cerchio BCD, fig.a 87, iscrivere un triangolo, simile al triangolo Dato P2 Pr.

Soluzione. Da uno qualunque dei vertici del triangolo dato, per esempio dal vertice P come centro, e con raggio eguale a quello del cerchio Dato, ossia CB, si descrivi, verso il lato opposto al vertice predetto, un arco indefinito E7. Preso sopra di quest'arco E7 un punto qualunque a piacere O come centro, e collo stesso raggio CB si descrivi un arco, che tagli i lati P2, PR, ovvero i loro prolungamenti, nei punti M ed N. Quindi con raggio eguale alla distanza dei due punti M, N, ed un punto D qualunque, preso a piacere sulla circonferenza del cerchio, come centro si tagli la stessa circonferenza in C; saranno D, C due dei vertici del triangolo cercato. Si trovi la quarta proporzionale alle tre 2R, PR, MN (problema 27); con questa presa per raggio, dallo stesso punto D come centro si tagli la circonferenza del cerchio in B. Saranno BCD i vertici del triangolo simile al dato triangolo P2R, ed iscritto al dato cerchio, come fu proposto.

200. Fra i poligoni irregolari il solo triangolo è quello, che si può descrivere al cerchio, e nessun altro.

Capitolo IV.°
Dei Centri.

Problema 64.°

201. Dato un cerchio PAN, fig.a 88, del quale non fosse noto il centro, trovare il suo centro.

Soluzione. Da un punto qualunque A, preso a piacere sulla periferia del cerchio, come centro, e con raggio arbitrario, per esempio AB, minore però del diametro, e maggiore di un quarto del diametro stesso, si descriva il semicerchio BCDE. Sia M il punto in cui il semicerchio taglia la periferia del cerchio dato. Con raggio EM, e coi centri E e D si tirino due archi, che si taglino in L. Collo stesso raggio LD, e col centro L si tagli il semicerchio BMDE in un punto 2. Quindi con raggio B2, e coi centri B e D si tirino due archi, che si taglino in O. Sarà O il centro cercato.

202. Osservazione. Gioverà in pratica, per ottenere sezioni di angoli i meno acuti, scegliere ad arbitrio un raggio AB, che si avvicini al valore del raggio del cerchio, di cui si cerca il centro.

Problema 65.°

203. Dato un arco di cerchio PAN, fig.a 88, di cui non fosse noto il centro dal quale fu descritto, trovare il centro.

Soluzione. È la stessa, che la precedente applicata al-

la

alla fig.a 88.

Problema 66.

204. Dato un triangolo equilatero ABC, fig.a 89, trovare il centro comune ai due circoli iscritto e circoscritto al triangolo dato, non che i raggi dei due circoli medesimi.

Soluzione. Da uno qualunque dei vertici, per esempio dal vertice A come centro, e con raggio AC si descriva una terza parte di circonferenza di cerchio, facendo cioè ad AC = CD = DB. Con raggio BD, e coi centri B ed A si descrivano due archi, che si taglino in F. Quindi collo stesso raggio FA, e col centro F si tagli l'arco DB in G. Sarà GE il raggio del cerchio circoscritto; per ciò presa per raggio la corda dell'arco GE, dai due punti A e B come centri si descrivano due archi, che si taglino in O; sarà questo il centro cercato, dal quale con raggio OA descritto un cerchio, la periferia di questo passerà per i tre vertici del triangolo dato, e per ciò sarà a questo circoscritto. Il raggio poi del cerchio iscritto si ha dividendo per metà la corda dell'arco GE in m, ed Em è il raggio del cerchio iscritto; che si descriverà dallo stesso centro O

Problema 67.

205. Dato un quadrato ABCD, fig.a 90, trovare il centro dei cerchj iscritto e circoscritto al dato quadrato, non che i loro raggi.

Soluzione. Da uno dei vertici, per esempio A, del dato quadrato, come centro, e con raggio AB, si descrivi un arco che passi per E, e dall'altro vertice D come centro, con raggio DB

di

li tagli il predetto arco in E Collo stesso raggio DB, e col centro B li segni un arco indefinito, che passi per due punti F ed G: e dal centro E, con raggio EA li tagli l'arco predetto nei punti G ed F. Quindi collo stesso raggio AE, e coi centri F ed F li segnino due archi, che si taglino in H. Finalmente con raggio AF, e coi centri A e B, si segnino due archi, che si taglino in O. Sarà O il centro, ed OA, OH i raggi dei cerchj cercati. Per ciò dal centro O, con raggio OA si descriva un cerchio, e questo sarà circoscritto al quadrato dato; e dallo stesso centro O, con raggio OH descrivendosi un altro cerchio, sarà questo il cerchio iscritto, come fu proposto.

Problema 68.

206. Dato un poligono regolare qualunque, trovare il centro ed i raggi dei cerchj iscritto e circoscritto al poligono proposto.

Soluzione. Siano BAM, fig.a 91, tre vertici del poligono regolare proposto, de' quali quello di mezzo A sarà equidistante dagli altri due B ed M, perchè appartenendi ad un poligono regolare. Col centro A, e col raggio AB si descriva il semicerchio BEDE, che passerà per M. Con raggio AE, e coi centri A ed E si segnino due archi, che si taglino in L. Da L come centro, e col raggio LA si tagli il semicerchio in Q; la corda dell'arco BQ sarà il raggio del cerchio circoscritto al dato poligono. E però, presi per centri due dei vertici qualunque, per esempio B ed M, con raggio BQ segnati due archi, che si taglino in O: sarà O il centro dei cerchj cercato.

Se

207. Se AB è un lato del poligono dato, si divida per metà in b, e sarà Ob il raggio del cerchio iscritto, che si descriverà dallo stesso centro O. E se fosse qualunque altro, per esempio AB uno dei lati del poligono dato, si dividerà AB per metà in B, e sarà OB il raggio del cerchio iscritto al poligono di lato AB.

208. Riguardo alla maniera di dividere per metà il lato AB, si è già parlato al § 105. del Libro II. Del quadrato ho accennata la più semplice. Del triangolo equilatero solo, il raggio del cerchio iscritto è la metà del raggio del circoscritto: e nel solo quadrato è eguale alla metà del lato. e del solo esagono regolare il raggio del cerchio circoscritto è eguale al lato del poligono medesimo. Per la qual cosa, se il poligono proposto, al quale si dovesse circoscrivere ed iscrivere un cerchio, sarà un esagono regolare, sarà in tal caso superflua tutta la prima parte della costruzione del problema, relativa a cercare i punti 1 e 2, i quali nel caso dell'esagono regolare coinciderebbono coi punti M ed O; come si vede nella stessa fig.a 91., nell'esagono punteggiato.

. . . . . .

Problema 69.

209. Dati tre punti A, B, C, fig.a 92, comunque situati, fuorchè nella stessa retta, trovare il centro di quel cerchio, del quale la circonferenza passerà pei dati tre punti.

Soluzione. Dai tre punti dati A, B, C come centri, e con raggi maggiori della metà delle rispettive loro distanze AB, BC, si descrivano quattro archi, che a due a due si taglino nei

punti

punti D, E, F, G. Quindi da due dei punti di sezione dei predetti archi, per esempio D, E, come centri, e colle rispettive distanze dagli altri due punti di sezione F, G prese per raggi, descrivano altri quattro archi, che a due a due si taglino nei punti f, f, g, g; cioè, da D come centro, e coi raggi Df, Dg si descrivino i due archi Ff, Gg, e da E come centro coi raggi Ef, Eg si descriveranno altri due archi, che taglieranno i primi nei predetti punti f, f, g, g. Si faccia gh = Gf, ed fh = Fg. Si trovi la quarta proporzionale alle tre fh, fg, hf (problema 27), e sia PQ. Con questa presa per raggio, e coi centri G, g si descrivano due archi, che si taglieranno in O; sarà O il centro del cerchio cercato. Per ciò descrivasi da O come centro, e con raggio OA, ovvero OB, ed anche OC si descriverà un cerchio, la periferia di questo dovrà necessariamente passare per i tre punti dati ABC, come si ricercava.

210. È incontrastabile che la soluzione di questo problema col metodo vecchio riesce più breve; ma è pure altresì vero che la precisione del punto O, dipendendo dalla maggiore o minore perfezione della riga, colla quale esso viene determinato, sarà pur sempre incerta; quando al contrario col metodo descritto, cioè col solo compasso, la posizione di quel punto si ottiene con tutta precisione Geometrica.

Problema 70.

211. Trovare i centri di due cerchj secanti BAD, MAP, fig.a 93., che si tagliano in due punti A e M.

Soluz=

Soluzione. Da uno dei punti di sezione delle due circonferenze, per esempio dalla sezione A come centro, e con raggio a M, si segni un arco, che abbia i suoi terminii alle circonferenze dei dati cerchj nei punti B e D: e sopra quest'arco si faccia ad AB = BC = CA = DE = FJ = JG = GH. Quindi con raggio EM, e coi centri A ed E si segnino due archi, che si taglino in K; e dai due punti A ed K come centri, e con raggio HM si segnino altri due archi, che si taglino in L. Ora da K come centro, con raggio KA si faccia sull'arco BCE la sezione V: e dal punto L come centro, con raggio LA si faccia sopra l'arco FJM la sezione O. Saranno KO, BV i raggi dei rispettivi cerchj. Per ciò con raggio BV, e coi centri B ed A segnati due archi, la loro sezione Q sarà il cercato centro del cerchio BAM; e con raggio PQ, e coi centri P ed A segnati due archi, che si taglino in R, sarà questo punto R l'altro centro cercato del cerchio HAM.

Capitolo V.

Dei Circoli Tangenti; e delle Tangenti al Cerchio.

Problema VI.

212. Dati due circoli tangenti GMA, GEC, fig.a 94., trovare il punto del loro contatto, essendo i due cerchj di raggio eguale.

Soluzione. Dai medesimi centri A e B dei dati cerchj, e con raggio eguale alla loro distanza AB si segnino due archi, che si taglino in F. Sulla circonferenza di uno dei cerchj dato,

si faccia al raggio AC = CD = DE. Quindi con raggio CE, e col centro F si taglino le circonferenze dei due cerchj in un punto G. Sarà questo punto G il punto del contatto cercato.

Problema 72.

213. Trovare il punto del contatto dei due circoli tangenti N2M, 2DR, fig.ª 95., essendo essi di raggio differente.

Soluzione. Col centro stesso di uno dei dati cerchj, per esempio A, e con raggio arbitrario, maggiore però di quello del cerchio stesso, si tagli la circonferenza dell'altro nei due punti D, E. Si divida l'arco D2E per metà in 2 (problema 57). Sarà 2 il punto del contatto dei due dati circoli, che si cercava.

214. Anche questi due ultimi problemi si risolvono più brevemente col metodo vecchio: congiungendo con una retta i centri dei dati cerchi; ma per la stessa osservazione fatta al §.210. il punto 2 di questo problema, ed il punto G dell'antecedente, sono col solo compasso determinati con più esattezza geometrica.

Problema 73.

215. Dato un cerchio BCD, fig.ª 96., ed un punto E qualunque nella sua circonferenza; trovare altri due punti H, L, per i quali conducendo una retta, riesca questa tangente nel dato punto E al cerchio dato.

Soluzione. Dal dato punto E come centro, e col raggio EA del cerchio dato si descriva un arco indefinito, e si faccia al

al raggio EA = BF = DG. Quindi collo stesso raggio, oppure con raggio arbitrario, e dai quattro punti B, F, G, D come centri si segnino quattro archi, che a due a due si taglino nei punti H e L. Saranno questi i punti cercati.

Problema 74.

216. Dato un cerchio BDC, fig.a 97., ed un punto qualunque M fuori dello spazio circolare, trovare nella periferia del cerchio due punti di contatto C, D delle due tangenti, che dal dato punto M, si possono condurre al cerchio medesimo.

Costruzione. Dal punto A, centro del cerchio, e dal dato punto M come centri, e con raggio arbitrario, maggiore però della metà della distanza dei due punti predetti, si descrivano due archi, che si taglino nei punti P e Q. Si divida per metà la distanza di questi due punti P, Q (prob. 7.) col punto N. Quindi col centro N, e col raggio NA si descrivi un arco, che tagli la periferia del cerchio dato nei punti C, D. Saranno questi i due punti cercati.

Problema 75.

217. Trovare nel punto del contatto la tangente qualunque TS alla periferia del cerchio dato BDE, fig.a 98.

Costruzione. Nella circonferenza del dato cerchio si faccia il raggio AB = BC = CD = DE: e si faccia inoltre a BD = BA = EA. Quindi con raggio BD, e col centro A si facciano sulla data tangente le due sezioni H, L. Finalmente con raggio AA, e col centro H, oppure L, si tagli la data tangente in M. Sarà M il punto del contatto cercato.

La

La costruzione di questo problema da me rinvenuta accidentalmente nello speculare altre soluzioni, parmi di tanta semplicità ed esattezza, da non lasciar desiderio di tentarne di nuove.

Capitolo VI.°

Della capacità degli Archi di cerchio rispetto agli angoli.

Problema 76.

218. Dalla circonferenza di un dato cerchio qualunque BCD, fig.ª 99., tagliare un arco capace di contenere un dato angolo M qualunque.

Soluzione. Col raggio AB del cerchio dato, e col centro M, vertice dell'angolo, si segni un arco indefinito EF, e sopra di questo preso un punto N a piacere come centro, col medesimo raggio AB si segni un arco, che tagli i lati dell'angolo dato in due punti P, Q. Sarà la distanza dei due punti P, Q la corda dell'arco cercato. Per ciò, presa PQ come raggio, da qualunque punto della periferia del cerchio dato, per esempio da un punto B, come centro, si tagli la stessa periferia in un punto C. Sarà l'arco BRC il cercato, capace cioè di contenere un'angolo BRC eguale al dato angolo M.

Volendosi poi costruire l'angolo: basterà prendere per raggio il lato QM dell'angolo dato, cioè la parte segata dall'arco descritto, e dallo stesso punto B come centro tagliare in R la periferia del cerchio. Sarà R il vertice dell'angolo cercato.

La

La costruzione di questo problema, che mi ha pure somministrato il modo di risolvere il problema 63, è del tutto nuova, ed è di una semplicità ed esattezza, che a mio debole parere è inuperabile.

Libro VIII.

Della similiglianza delle figure, e della costruzione dei poligoni simili in generale.

Capitolo I.

Definizioni e nozioni preliminari.

219. Si dicono *simili* quelle figure o poligoni rettilinei, che hanno un numero eguale di angoli rispettivamente eguali, e che d'intorno agli angoli eguali hanno i lati proporzionali.

Due poligoni ABCD, EFGH, fig.a 100, si dicono poligoni simili, perchè hanno gli angoli rispettivamente eguali: cioè l'angolo DAB dell'uno eguale all'angolo HEF dell'altro, e così pure gli altri tre angoli ABC=EFG, BCD=FGH, e CDA=GHE.

E perchè inoltre i due lati AD, AB che stanno intorno all'angolo DAB, stanno nel medesimo rapporto, nel quale stanno fra loro i due EH, EF che sono intorno all'angolo HEF dell'altro poligono, per ciò si dicono proporzionali. Lo stesso dicasi di rispetto agli altri lati che stanno intorno agli altri angoli ABC, BCD, CDA, ec:.

220. Lati omologhi sono quei lati delle figure simili, i

quali

quali sono intercette da angoli rispettivamente eguali. Per ciò il lato AB del poligono ABCD, fig.a 100, è omologo del lato EF dell'altro poligono EFGH, perchè ambidue intercette dagli angoli DAB, ABC eguali rispettivamente agli altri due HEF, EFG.

221. Angoli omologhi si dicono quegli angoli delle figure simili, che sono rispettivamente eguali fra loro. Così l'angolo DAB del poligono DABC, fig.a 100, essendo eguale all'angolo HEF dell'altro poligono simile, questi due angoli si dicono omologhi.

222. Figure reciproche sono quelle nelle quali un lato dell'una sta ad un lato dell'altra, come un lato della seconda sta ad un lato della prima.

223. Lemma. Se nei due poligoni simili ABCD, EFGH, fig.a 100, si guidano le due diagonali DB, HF, i due poligoni saranno da queste decomposti in due triangoli, de' quali quelli dell'uno saranno rispettivamente simili a quelli dell'altro. Da ciò ne segue che le due diagonali DB, HF, essendo lati di triangoli simili, saranno fra loro proporzionali; come lo saranno pure rispettivamente fra loro tutte le diagonali, che si conducessero in due, o più poligoni simili, per decomporli in tanti triangoli.

Capitolo II.

Della costruzione dei poligoni simili a poligoni dati, e sopra lati omologhi proposti.

Problema 44.

224. Dato un triangolo qualunque ABC, fig.a 101, e data una retta

retta DE per lato omologo del lato AB del triangolo proposto, trovare gli altri due lati coi quali costruendo sopra il lato dato DE un triangolo, riesca questo simile al triangolo proposto ABC.

Soluzione. Coi due lati omologhi AB, DE presi per raggi, e da un qualunque punto O come centro, si descrivano due cerchj. Sulla circonferenza del cerchio di raggio AB, si applichino come corde gli altri due lati AC, BC, facendo nella circonferenza predetta le sezioni M, I, II, e contrassegnando i lati del triangolo colle stesse cifre numeriche, come si vede nella figura 101, onde non errare nel prendere le misure delle corrispondenti con DE. Quindi dai tre punti M, I, II, come centri, e con raggio arbitrario, si facciano sulla periferia del cerchio esterno, di raggio DE, le tre successive sezioni N; 1; 2. Saranno N1, 1-2 i lati cercati. Per ciò presa come raggio la corda dell'arco N1, da D come centro, si segni un arco che passi per F: e dal centro E, con raggio 1-2, si tagli l'arco predetto in F. Saranno DEF i vertici del triangolo richiesto, simile cioè al triangolo ABC proposto.

Si avverta, che per ottenere sezioni ad angoli più che è possibile vicini al retto, conviene che il raggio arbitrario MN sia tale, che le due rette che si conducessero dal punto M al punto N, e dallo stesso punto M al centro O, formino un angolo grossolanamente retto, il che si può fare ad occhio.

Prob.

Problema 78.

225. Sopra un dato lato $E7$, fig.a 102, costruire un quadrilatero simile al dato quadrilatero $ABCD$; supposto $E7$ come lato omologo del lato AB, del poligono dato.

Soluzione. - Con raggi eguali ai due lati omologhi AB, $E7$, e da uno stesso centro O qualunque, si descrivano due cerchj. Sulla circonferenza del cerchio di raggio AB, si applichino come corde le diagonale AC, e i tre lati BC, CD, DA, cominciando da un punto M, preso a piacere sulla circonferenza del cerchio medesimo, e contrassegnando con cifre numeriche Romane tanto le sezioni fatte sulla circonferenza predetta, quanto le diagonale e i lati corrispondenti del dato quadrilatero. Quindi, dai determinati punti M, I, II, III, e IV come centri, e con raggio arbitrario MN, si facciano sulla circonferenza del cerchio interno, di raggio $E7$, le sezioni N, 1, 2, 3, e 4. Le corde $N1$, 1-2, 2-3, 3-4, saranno la diagonale e i lati del poligono da costruirsi. Per ciò presa per raggio la corda dell'arco $N1$, dal punto E come centro, si tagli un arco che passi per G: e dal punto 7 come centro, e con raggio 1-2, si tagli il predetto arco in G. Quindi con raggio 2-3, dal punto G come centro, si tagli un arco che passi per H, e da E come centro con raggio 3-4, si tagli il predetto arco in H. Saranno E, 7, G, H i vertici del quadrilatero simile al quadrilatero proposto $ABCD$, e descritto sopra il dato lato $E7$ omologo di AB, come fu richiesto.

Prob.

Problema 49. 54 (fig. 103)

226. Dato un poligono qualunque ABCDEFG, fig.ª 103, e data inoltre una retta HK per lato omologo di uno qualsivoglia dei lati del proposto poligono, per esempio del lato AB; trovare i lati del poligono, che corrispondi sul dato lato HK, simile al poligono dato.

Soluzione. Da uno qualunque dei vertici del poligono dato, per esempio dal vertice A, si guidino a tutti gli altri angoli non adiacenti le diagonali AC, AD, AE, ec.; e si contrassegnino colle cifre I, II, III, ec.

Dalla estremità H, del dato lato HK omologo di AB, si guidino cinque rette indefinite, che formino tra loro angoli rispettivamente eguali a quelli formati dalle diagonali con detti nel dato poligono, e si marchino con numeri arabici rispettivamente eguali a quelli romani, con quali si sono contrassegnate queste ultime.

Quindi con raggi eguali a due lati omologhi AB, HK, da uno stesso centro O, preso ad arbitrio, si descrivano due cerchj: e sulla circonferenza dell'esterno, di raggio AB, si applichino successivamente come corde le diagonali I, II, III, IV, ed il lato V, cominciando da un punto M preso a piacere sulla circonferenza medesima.

Da tutti i punti M, I, II, III, ec., come centri, e con raggio arbitrario MN, si facciano sulla circonferenza del cerchio interno, di raggio HK, le successive sezioni N, 1, 2, 3, 4, e 5. Finalmente, fatte le H1 = N1, H2 = 12,

H2 =

$H2 = 2\,3$, $HHe = 3\,4$, ed $HeS = 4\,5$, saranno $H, H, L, P, 2, Re, S$ i vertici del cercato poligono, costruito sopra il dato lato HH', e simile al poligono proposto.

Libro IX.

Delle figure Equivalenti,

ossia dei poligoni equivalenti in superficie ad altri poligoni; di quelli che essendo simili a poligoni dati sono nel tempo stesso equivalenti ad altri poligoni parimente dati; dei differenti rapporti di superficie fra poligoni simili, e poligoni di differente specie; e finalmente del metodo di trovare i rispettivi loro lati, e di costruirli.

Nozioni preliminari.

227. Una retta non può essere eguale ad un'altra retta, se la lunghezza della prima non è eguale a quella della seconda.

228. Le superficie poi, le quali abbracciano due dimensioni, lunghezza cioè, e larghezza, possono essere eguali benchè terminate o rinchiuse da un differente numero di lati e di angoli: e questa eguaglianza, che più a ragione vien detta equivalenza, si riferisce alla estensione o spazio rinchiuso dai perimetri delle diverse figure, e non già alla loro forma, la quale perchè per lo più eguale, conviene,

viene che le figure abbiano un numero eguale di lati rispettivamente eguali, intorno ad angoli rispettivamente eguali; di maniera che sovrapponendole una all'altra devono esattamente coincidere i vertici dell'una con quelli dell'altra, e così pure i lati rispettivi dell'una coi rispettivi lati dell'altra.

229. L'equivalenza delle figure diverse consistendo nella eguaglianza di superficie o di area circoscritta dai perimetri delle stesse figure, ne viene che un triangolo, a cagion di esempio, può essere equivalente ad un quadrato, o a qualunque altro poligono, e viceversa, quando l'area o superficie dell'uno, eguaglia quella dell'altro.

230. Un poligono si dice equivalente a due, tre, quattro, ec. poligoni, quando la sua superficie eguaglia quella dei due, tre, quattro, ec., poligoni presi insieme, o domandati insieme.

231. Finalmente un triangolo, o altro poligono qualunque, può essere simile ad un altro poligono, e nel tempo stesso equivalente ad un terzo poligono qualunque, o pure a due, tre, quattro, ec. poligoni qualunque presi insieme; quando i suoi angoli siano rispettivamente eguali a quelli del secondo poligono, e i lati intorno agli angoli eguali proporzionali: e quando la sua superficie eguaglierà quella del terzo poligono, ovvero dei due, tre, quattro, o ec., poligoni presi insieme.

Cap.

Capitolo I.

Dei poligoni equivalenti ad altri poligoni dati, e della loro costruzione.

Problema 80.

232. Dato un triangolo qualunque ABC, fig.a 104, trovare i vertici di un parallelogrammo rettangolo, equivalente al triangolo proposto.

Soluzione I. Si divida per metà uno qualsivoglia dei lati del triangolo dato, per esempio il lato BC, col punto D, e da questo come centro, e con raggio DB, oppure DC, si segni un arco che tagli in E la base AC del triangolo dato. Quindi divisa per metà la base AE col punto H, con raggio AH, e coi centri B, ed E si segnino due archi, de' quali quello descritto dal centro B passi per E, e l'altro tagli la base AC in K. Finalmente con raggio EB, e col centro K si tagli l'arco che passa per E. Saranno B, E, K, L i vertici del cercato parallelogrammo rettangolo, equivalente al triangolo ABC proposto.

233. Osservazione. La superficie di un triangolo qualunque, è la metà di quella di un parallelogrammo di eguale base, e di eguale altezza. Ora il parallelogrammo rettangolo BEKL essendo costruito sopra la metà della base del triangolo ABC, ed avendo la stessa altezza del triangolo medesimo, sarà per ciò equivalente ad esso triangolo.

234. Sarà inoltre equivalente al dato triangolo ABC

quel

quel parallelogrammo, il quale essendo costruito sopra la stessa base del triangolo, non avrà di altezza che la sola metà di quella del triangolo medesimo. Questo parallelogrammo rettangolo si costruirà nel modo indicato nella soluzione che segue.

Soluzione II. Si divida per metà l'altezza EG del triangolo col punto M, e da questo come centro, e con raggio EC, si segni un arco che passi per G, e dallo stesso centro con raggio EA se ne segni un altro che passi per F. Finalmente con raggio CM, e coi centri A, e C, si taglino i precedenti due archi nei punti F, e G. Saranno ACGF i vertici del parallelogrammo rettangolo cercato, equivalente cioè al parallelogrammo rettangolo trovato colla prima costruzione, e per conseguenza al triangolo dato.

Problema 81.

235. Dato un parallelogrammo qualunque ABCD, fig. 105, trovare il lato del quadrato equivalente al proposto parallelogrammo.

Soluzione 1. Dal vertice A, opposto alla base DC, si cali sopra la base stessa la normale AE (problema 14). Si trovi la media geometrica fra le due DC, AE (problema 28), e sia questa per supposizione la retta MN. Sarà MN il lato del quadrato cercato, equivalente al parallelogrammo proposto.

Prob.

Problema 82.

236. Trovare il lato del quadrato che sia equivalente ad un dato triangolo qualunque ABC, fig.a 104.

Soluzione. Nella costruzione dell'antecedente problema 81, abbiamo veduto, che il lato del quadrato equivalente ad un parallelogrammo, è media proporzionale geometrica fra la base e l'altezza dello stesso parallelogrammo. Per la qual cosa, la soluzione del presente problema si riduce in trovare la media geometrica fra la base AC, e la metà dell'altezza EB, ovvero fra l'altezza EB, e la metà della base AC, cioè la AH, e questa media sarà il lato del quadrato cercato.

237. Poichè sono i due parallelogrammi rettangoli AFGC, BEKL, equivalenti fra loro, ed equivalenti ciascuno al triangolo ABC; e sono inoltre le basi e le altezze dei parallelogrammi predetti rispettivamente eguali alla base ed all'altezza, ed alla metà della base e dell'altezza del triangolo medesimo; ne viene che la media geometrica fra la base e l'altezza di ambidue quei parallelogrammi, sarà il lato del quadrato equivalente a ciascuno dei due parallelogrammi rettangoli, e conseguentemente equivalente anche al triangolo dato ABC.

Problema 83.

238. Dato un Trapezio, o quadrilatero qualunque ABED, fig.a 106., trovare il lato dell'equivalente quadrato.

Solu-

Soluzione. Si decomponga il dato trapezio nei due triangoli ABC, ACD, mediante la diagonale AC; che sarà base comune dei due triangoli predetti. Si trovi la media proporzionale (problema 28.) fra la metà della base comune AC, e la altezza dei due triangoli unite insieme; o ciò ch'è lo stesso fra la comune base AC, e la metà dell'altezza del triangolo ABC, unita alla metà di quella del triangolo ACD. Sia per supposizione MN' la trovata media; sarà MN' il lato del quadrato cercato, equivalente al dato Trapezio.

239. Osservazione. Si avrebbe potuto trovare i lati dei due quadrati rispettivamente equivalenti ai due triangoli, nei quali fu decomposto il Trapezio, e quindi quello del quadrato equivalente ai due quadrati trovati; ma con tal metodo si avrebbe allungata la costruzione. Perciò in seguito dovendosi trovare i lati dei quadrati equivalenti ai trapezj, nei quali si fosse decomposto un poligono qualunque, faremo sempre uso della costruzione indicata nella soluzione di questo problema.

Problema 84.

240. Dati i lati di due quadrati AB, CD, fig.ª 107, trovare il lato di quel quadrato che sia equivalente ai due quadrati proposti, presi insieme o sommati insieme.

Soluzione. Da una estremità di uno dei lati dati, per esempio dalla estremità A del lato AB, s'innalzi una retta in-

definita

indefinita AE normale alla AB; da questa di tagli una parte AE = CD. Sarà EB il lato del quadrato equivalente alla somma dei due quadrati, de' quali furono dati i lati AB, CD, come fu proposto.

Problema 85.

241. Dati i lati di un numero qualunque di quadrati, per esempio dati i lati AB, CD, FG, HK, fig.ª 107, di quattro quadrati, trovare il lato di quel quadrato che sarà equivalente a quattro quadrati dati presi insieme, o sommati insieme.

Costruzione. Nella costruzione dell'antecedente problema abbiamo trovato EB lato del quadrato equivalente ai due quadrati, de' quali furono dati i lati nelle rette AB, CD. Ora per trovare il lato del quadrato equivalente a tutti quattro i quadrati proposti; si faccia AL = EB, e sopra AB di porti FG da L in M: sarà ML il lato di quel quadrato che sarà equivalente ai tre quadrati, de' quali i lati sono AB, CD, FG. Finalmente faccia si AN = ML, e dal lato AB di tagli una parte AC = HK. e sarà NB per il lato del quadrato cercato, equivalente cioè ai quattro quadrati, i lati dei quali sono dati nelle rette AB, CD, FG, HK.

242. Qualunque fosse il numero dei quadrati proposti, progredendo col metodo esposto nella costruzione di questo problema, si arriverà a trovare il lato del quadrato equivalente

valente a qualunque numero di quadrati presi insieme.

Problema 86.

243. Dati i lati MN, PQ, fig.ª 108., di due quadrati, trovare il lato di un terzo quadrato la cui superficie agguagli la differenza che vi ha fra le superficie dei due quadrati proposti.

Soluzione. Da una delle estremità di uno dei lati dati, per esempio dalla estremità M del lato MN, s'innalzi una retta ML perpendicolare ad MN ed eguale all'altro lato PQ. Quindi con raggio eguale al lato del quadrato maggiore MN, e col centro L, estremità del lato del quadrato minore, si segni un arco che tagli il lato MN in un punto O. Sarà MO il lato del quadrato cercato, il quale agguaglierà la differenza dei due quadrati proposti.

Problema 87.

244. Trovare il lato di quel quadrato che sia equivalente ad un dato poligono qualunque ABCDEF, fig.ª 109, ossia trovare la radice quadrata di un poligono qualunque.

Soluzione. Si decomponga il dato poligono in due quadrilateri ABEF, BCDE, mediante la diagonale BE. Colla costruzione del problema 82 si trovino i lati dei due quadrati rispettivamente equivalenti ai due trapezj, nei quali si è decomposto il poligono, e suppongasi che i lati trovati sieno le due rette LM, NO. Ora si trovi il lato del quadrato equi=

equivalente ai due quadrati, de' quali si son trovati i lati LM, NO (problema 83), e sia PQ. Sarà PQ il lato del quadrato cercato, equivalente al poligono ABCDEF proposto.

Problema 88.

245. Trovare il lato di quel quadrato che sia equivalente a due poligoni quali si vuole, che a risparmio di nuove figure supponiamo essere i due poligoni ABEF, BCDE, fig.a 109.

Soluzione. Colle costruzioni dei due problemi 82, e 83, citate nella soluzione del precedente problema 86, si avrà PQ pel lato del quadrato cercato; e per ciò la soluzione di questo problema.

Problema 89.

246. Trovare il lato di quel quadrato che sia equivalente alla differenza che vi ha fra le aree di due poligoni qualunque.

Soluzione. Sieno, per esempio, ABEF, BCDE, fig.a 109, i due proposti poligoni. Colla costruzione del problema 83, si trovino i lati LM, NO, dei quadrati rispettivamente equivalenti ai due poligoni proposti. Quindi colla costruzione del problema 86 si trovi il lato del quadrato che eguagli la differenza di area dei due quadrati, de' quali si hanno i lati LM, NO; e trovatolo, sarà questo il lato del cercato quadrato.

Prob=

Problema 90.

247 Dato un numero qualunque di poligoni, trovare il lato di quel quadrato che sia equivalente a tutti i poligoni dati presi insieme.

Soluzione. Colla costruzione del problema 87, si trovino i lati dei quadrati rispettivamente equivalenti ai poligoni, che saranno proposti. Quindi colla costruzione del problema 85, si troverà il lato di quel quadrato che sia equivalente a tutti i quadrati, de' quali si sono trovati i lati: e sarà questo il lato del quadrato richiesto.

248. Osservazione. Dopo le costruzioni dei problemi antecedenti sarebbe stata superflua la costruzione del problema presente; di ciò per ciò stimato che basti l'indicare soltanto il metodo di soluzione, come di è fatto.

Capitolo II.

Dei poligoni simili a poligoni dati, e nello stesso tempo equivalenti ad altri poligoni parimente dati.

Al paragrafo 231. abbiamo detto, che un poligono può essere simile ad un altro poligono qualunque, e nel tempo stesso equivalente ad un terzo poligono qualunque, e anche a due, tre, ec. poligoni presi insieme. Ora vediamo come si trovino i lati di questi poligoni, e come si costruiscano.

Prob.

Problema 91. 60

248. Dati due triangoli qualunque abc, DEF, fig.ª 110, trovare i lati di un terzo triangolo che, essendo simile al triangolo dato abc, riesca equivalente all'altro triangolo DEF.

Soluzione. Colla costruzione del problema 82 si trovino i lati dei quadrati rispettivamente equivalenti ai due triangoli dati; e sia MN il lato del quadrato equivalente al triangolo abc, e PQ quello del quadrato equivalente all'altro triangolo DEF.

Con questi due lati MN, PQ presi per raggi, da uno stesso centro O qualunque, si descrivano due cerchj. Sulla circonferenza del cerchio di raggio MN (radice del triangolo al quale dev'essere simile quello da costruirsi), si applichino successivamente come corde i lati del corrispondente triangolo abc, cominciando da un punto R preso ad arbitrio sulla circonferenza medesima; e si contrassegnino colle cifre I, II, III, tanto le sezioni fatte sulla circonferenza di quel cerchio, quanto i corrispondenti lati del triangolo.

Quindi dai predetti punti di sezione R, I, II, III come centri, e con raggio arbitrario RS, si facciano sulla circonferenza del cerchio esterno, di raggio PQ, altrettante sezioni S, 1, 2, 3. Le corde degli archi S1, 1-2, 2-3, saranno i lati cercati, coi quali costruendo un triangolo (probl. 37), questo sarà simile al triangolo abc, ed equivalente all'altro DEF, come fu proposto.

Prob=

Problema 92.

249. Dati due trapezj qualunque ABCD, EFGH, fig.ª III, trovare i vertici di un terzo trapezio che riesca simile al trapezio ABCD, ed equivalente all'altro EFGH.

Soluzione. Colla costruzione del problema 83, si trovino i lati dei due quadrati equivalenti rispettivamente ai due trapezj proposti; e sia RL il lato del quadrato equivalente al trapezio ABCD, ed MN quello del quadrato equivalente all'altro trapezio EFGH.

Coi trovati due lati RL, MN presi per raggi, da uno stesso centro O preso a piacere, si descrivano i due cerchj $P_{I,II,III}$, 2.2.3. Si decomponga il trapezio ABCD in due triangoli, mediante la diagonale AC, e si contrassegnino i lati AD, AB, e la diagonale AC colle cifre numeriche romane I, II, III, come si vede nella figura. Quindi sulla circonferenza del cerchio corrispondente, cioè di raggio RL, si collochino come corde successivamente il lato AD, la diagonale AC, ed il lato AB del trapezio predetto, cominciando a portarle da un punto qualunque P, preso a piacere sulla circonferenza del cerchio predetto, e si notino le sezioni colle stesse cifre numeriche romane, colle quali si sono segnati i lati e la diagonale del trapezio in questione.

Da tutti i punti di sezione P, I, II, e III come centri, e con raggio arbitrario PZ, si facciano sulla circonferenza del cerchio interno, di raggio MN, altrettante sezioni, che si contrassegneranno con cifre numeriche arabiche simili alle prime

romane,

e rispettivi col medesimo ordine. Nelle sezioni 2, 1, 2, e 3, si avranno i due lati e la diagonale del trapezio da costruirsi, omologhi dei lati ad, ab e della diagonale ac del dato trapezio abcd, che si costruirà come segue.

Da un qualunque punto a si guidano tre rette ab, ac, ad, formanti fra loro angoli rispettivamente eguali a quelli, che fra loro formano le ab3, ac, ad del trapezio abcd. Si faccia $\overset{a\,d}{n\,o} = 2\text{-}1$, $ac = 1\text{-}2$, $ab = 2\,3$. Saranno a, b, c, d, i vertici del cercato trapezio, simile al trapezio abcd, e equivalente all'altro trapezio dato EFGH, come fu proposto.

Problema 93.

250. Dati due poligoni qualunque ACEG, KLMO2, fig.a 112, trovare i vertici di un terzo poligono simile ad uno qualunque dei due dati, per esempio simile al poligono KLM O2, ed equivalente all'altro ACEG.

Soluzione. Si scompongano i dati poligoni in tanti trapezj, mediante le diagonali C4, C3 del poligono ACEG, ed N2, N3, N2 dell'altro poligono KLMO2. Colle costruzioni dei problemi 82, 83, e 85, si trovino i lati dei due quadrati rispettivamente equivalenti ai due poligoni proposti; e sieno le due rette X2, Y1 i lati trovati.

Coi lati X2, Y1 dei due quadrati, equivalenti rispettivamente ai dati poligoni, presi per raggi, da un punto O qualunque si descrivano due cerchj. Quindi nel poligono KLMO2, a cui deve esser simile il poligono da costruirsi, da

uno

uno qualunque dei vertici, per esempio dal vertice N, a tutti gli altri angoli non adiacenti si guidino altrettante diagonali, e si contrassegnino i due lati NM, NO, e le diagonali predette colle cifre I, II, III, ec. Da un punto P', preso a piacere sulla circonferenza del corrispondente cerchio di raggio QY, si collochino successivamente come corde le diagonali ed i lati I, II, III, ec., e si notino le sezioni colle stesse cifre numeriche, come lo mostra la figura.

Finalmente da tutti i punti di sezione del cerchio interno P', I, II, ec., come centri, e con raggio arbitrario P'2', si facciano sulla circonferenza del cerchio esterno altrettante sezioni 2', 1, 2, 3, ec. Saranno 2'1, 7-8 i due lati, e 1-2, 2-3, 3-4, ec. le diagonali, colle quali si costruirà il nuovo poligono come segue.

Da un punto qualsivoglia n, si guidino otto rette, che formino fra loro angoli rispettivamente eguali, a quelli che fra loro formano i lati NM, NO, e le diagonali I, II, ec., del poligono KMOQ. Si faccia nm = 2'1, nl = 1-2, nk = 2-3, ns = 3-4, nr = 4-5, ec. Saranno k, l, m, n, o, p, q, r, s i vertici del cercato poligono, simile al poligono KMOQ, ed equivalente all'altro poligono ACEG, come fu proposto.

231. Osservazione. Dalle soluzioni dei problemi antecedenti si vede chiaramente cosa si dovrà fare nel caso, che fossero dati più poligoni, e si chiedesse di costruirne un nuovo simile ad uno qual si vorrà dei dati, ed equivalente a tutti i rimanenti presi insieme, o sommati insieme,

me. Imperocchè trovati i lati dei rispettivi quadrati equivalenti ai dati poligoni (problema 87), e trovato il lato del quadrato equivalente a tutti i quadrati equivalenti a quei poligoni, alla somma dei quali dev'essere equivalente il nuovo poligono (problema 85); con questo lato, e con quello del quadrato equivalente a quel poligono, al quale si deve far simile il poligono da costruirsi, presi per raggio, da uno stesso centro si descriveranno i soliti due cerchj: e la parte rimanente della costruzione del problema sarà in tutto simile a quella del problema in questione.

Capitolo III.°

Dei differenti rapporti fra le aree, o le grandezze delle varie superficie piane, o dei varj poligoni.

252. Che cosa sia rapporto, o ragione geometrica lo abbiamo spiegato al § 131 del Libro IV; e qui non possiamo se non che rimandare il lettore alle definizioni di quel libro, onde richiamare alla memoria tutto ciò che ha relazione coi problemi, che saranno trattati in questo capitolo.

Problema 94.

253. Dato il lato a^2, fig.a 113, di un quadrato, trovare il lato di un altro quadrato, la cui superficie sia o doppia, o tripla, o quadrupla, o ec., di quella del quadrato proposto,

posto, oppure in qualsivoglia altro rapporto, come meglio piacesse.

Soluzione. Col lato del quadrato dato preso per raggio, da un punto qualunque A si descriva un cerchio BDd, e nella sua circonferenza si faccia al raggio AB=BC=CD=DE=Ed=dc. Coi centri B ed E, e con raggio BD si segnino due archi che si taglino nei punti a, a'; collo stesso raggio BD, e coi centri D, d, si segnino due archi che si taglino in L. Con raggio Aa, e col centro B si tagli la circonferenza del cerchio in F. Con raggio AB, e coi centri B ed F, si segnino due archi che si taglino in M.

Se sarà domandato il lato del quadrato doppio in superficie al quadrato proposto, si avrà questo nella distanza Aa. Se triplo si avrà in BD. Se quadruplo ne sarà il lato BE. Se quintuplo si avrà il lato nella distanza dei due punti EM. Se sestuplo in aL, oppure a'L. Se settuplo in CL. Se ottuplo in aa'. Se nonuplo si avrà in BL. Se finalmente, sarà chiesto il lato di un quadrato decuplo in superficie al quadrato proposto; si avrà il suo lato nella distanza dei due punti LM.

254. Osservazione. Colla costruzione di questo problema si sono ottenuti i lati dei quadrati doppj, tripli, quadrupli, ec., sino al lato del quadrato decuplo in superficie, ad un quadrato dato qualunque, e si ha pure nella soluzione del problema medesimo il mezzo facile e breve di trovare

i lati,

i lati, ovvero i vertici di un poligono doppio, triplo, quadruplo, ec., a qualunque dato poligono dato, come si vedrà nella soluzione dei problemi che versano in seguito.

Problema 95.

255. Dato il lato P2, fig.a 114, di un quadrato, trovare il lato di quel quadrato, di cui la superficie sia la metà, un terzo, un quarto, ovvero un quinto, o ec., di quella del quadrato proposto, sino al lato di un quadrato la cui superficie sarà un decimo di quella del dato.

Soluzione. Con raggio qualunque si costruisca la figura 113. e supponiamo che sia domandato il lato di un quadrato, la cui superficie sia un quinto di quella del quadrato proposto, del quale è dato il lato P2.

Se nella fig.a 113, supponiamo il raggio AB=1, si avrà EM=5, come abbiamo osservato nella soluzione del problema 94. Per ciò da un punto O preso a piacere come centro fig.a 114, e coi raggi AB, EM, fig.a 113, si descrivano due archi indefiniti RoS, MN. Sopra l'arco MN, di raggio =5, si applichi come corda il lato P2 del proposto quadrato, facendo le sezioni MN; quindi da questi punti M N come centri, e con raggio qualunque MRo, facciansi sull'arco interno di raggio=1, le due sezioni RoS. Sarà RoS il lato cercato, di quel quadrato cioè la cui superficie sarà $\frac{1}{5}$ di quella del quadrato, di cui fu dato il lato P2.

256. La costruzione di questo problema fa chiaramente vedere cosa si dovrà fare, qualunque altro fosse il rapporto che si volesse, fra le superficie dei due quadrati. E come dalla costruzione del precedente problema si deriva il mezzo di costruire dei poligoni multipli in superficie di altri poligoni proposti, così dalla soluzione di questo, ne viene il modo di costruire dei poligoni, le cui superficie saranno $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ec., fino a un decimo di quella, di quel poligono qualunque che fosse proposto, come si vedrà nei problemi che verranno in seguito.

Problema 96.

257. Dato un triangolo qualunque ABC, fig.ª 115, trovare i lati di un altro triangolo simile al proposto, e tre volte maggiore in superficie.

Soluzione. Con raggio qualunque si costruisca la fig.ª 113, nella quale si avrà, supposto il raggio $=1$, $BD=3$. Per ciò coi raggi AB, BD di quella figura, da un qualunque punto O fig.ª 115, si descrivano due cerchj, e dalla circonferenza dell'interno di raggio $=1$, si collochino come corde i lati AC, CB, BA del triangolo dato, cominciando a portarle da un punto M preso a piacere dalla circonferenza del predetto cerchio, e marcando le successive sezioni colle stesse cifre, I, II, III, colle quali si sono notati i corrispondenti lati del triangolo dato ABC. Quindi da tutti i punti di sezione M, I, II, e III, come centri, e con raggio arbitrario MN, si facciano

dalla

sulla circonferenza del cerchio esterno, di raggio =3, attrettan-
te lezioni N, 1, 2, 3. Saranno N1, 1-2, 2-3, ossiano le
corde di quegli archi, i lati del triangolo cercato; cioè
del triangolo 2E7; il quale si costruirà col metodo inse-
gnato nel problema 37, del libro quinto.

Problema 94.

258. Dato un poligono qualunque ABCDE, fig.a 116, trova-
re i vertici di un poligono simile al proposto, e di super-
ficie quintupla.

Soluzione. Con raggio qualunque si costruisca la fig.a
113, nella quale come di è sempre supposto il raggio AB
=1, di avrà Ecll= 5. Con queste due distanze AB, Ecll
prese per raggi, si descriveranno come al solito due cerchi
concentrici; e sopra la circonferenza del cerchio di rag-
gio =1, si applicheranno come corde i due lati I, e V, non
che le diagonali II, III, e IV, contrassegnando le sezioni che
si faranno sopra la circonferenza del predetto cerchio, colle
stesse cifre colle quali si sono marcati i lati e le diagona-
li del poligono proposto, e ciò per non confondere un lato
con l'altro, o una diagonale con un'altra. Quindi dalle
le sezioni del cerchio di raggio=1, già determinate, come
centri, e con raggio arbitrario, si faranno sulla circon-
ferenza del cerchio di raggio=5, attrettante sezioni: le
corde degli archi determinati dalle sezioni praticate, saran
no i lati e le diagonali del poligono da costruirsi, cioè del

poligo-

poligono abcdef, fig.a 116, che si costruirà col metodo esposto nella soluzione del problema 49, fig.a 103.

Problema 98.

259. Dato un triangolo qualunque ABC, fig.a 115, trovare i lati di un altro triangolo simile al proposto, e la cui superficie sia a una metà, o un terzo, o ecc., di quella del triangolo dato, o in qualunque altro rapporto proposto.

Soluzione. Si voglia per esempio che la superficie del triangolo da costruirsi stia a quella del proposto come 1:7, ovvero sia una settima parte della superficie del triangolo dato.

Con raggio qualsivoglia si costruisca la fig.a 113, dalla quale presi come raggi AB, CL, da un punto qualunque O si descrivano i due cerchi M, II, III, N.o 3, e sulla circonferenza del cerchio maggiore di raggio CL = 7 si col stadino come corde i lati del triangolo proposto, cominciando da un punto N qualunque della circonferenza, e marcando le sezioni 1, 2, 3. Da tutti i punti N, 1, 2, 3 come centri, e con raggio NM, si faranno dalla circonferenza del cerchio minore di raggio AB = 1 altrettante sezioni M, I, II, III. e saranno MI, I-II, II III, i lati del triangolo cercato, che si costruirà come è noto.

Problema 99.

260. Dato un poligono qualunque abcdef, fig.a 117, trovare i vertici

i vertici di un poligono simile al proposto, e la cui superficie sia un quinto di quella del poligono dato.

Soluzione. Con raggio qualunque costruita la fig.ª 113, e come il solito supposto il raggio AB=1, di avrà Ecll=5. Coi raggi AB, Ecll, e da un qualsivoglia punto O come centro si descrivano i due cerchj M. II-IV, N.º 4. Da un vertice qualunque, per esempio, dal vertice A del poligono dato, si guidino a tutti gli angoli non adiacenti E, D, C le diagonali AE, AD, AC, e si contrassegnino colle cifre II, III, IV, come pure colle cifre I, V i due lati AF, AB, come lo mostra la figura 117.

Sulla circonferenza del cerchio maggiore, di raggio Ecll=5, si collochino come corde i lati e le diagonali suddette, e si contrassegnino le sezioni colle stesse cifre numeriche corrispondenti a quelle, colle quali sono marcati i lati e le diagonali del poligono dato.

Da tutti i punti di sezione M, I, II, ec., del cerchio esterno, come centri, e con raggio arbitrario MN, si facciano sulla circonferenza del cerchio minore di raggio AB=1, altrettante sezioni, e si notino con cifre numeriche arabiche corrispondenti. Saranno N1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, i lati e le diagonali, omologhe a quelle del poligono dato, e coi quali si costruirà il nuovo poligono, col medesimo metodo col quale si costruì il poligono abcdef, della fig.ª 116. Il poligono abcdef, fig.ª 117, così costrutto sarà simile al poligono dato ABCDEF, e cinque volte

minore

minore in superficie di questo, come si ricercava.

Capitolo IV.

Dei poligoni simili a poligoni dati, o le cui superficie stanno in differenti rapporti con quelle di altri poligoni parimente dati.

Problema 99/100.

261. Dati due triangoli qualunque abc, DEF, fig.a 118, trovare i lati di un terzo triangolo simile ad uno qualsivoglia dei dati, per esempio, simile al triangolo abc, e la cui superficie sia o doppia, o tripla, o quadrupla, o ec., dell'altro triangolo dato DEF.

Soluzione. Si voglia, per esempio, che la superficie del triangolo da costruirsi sia quadrupla di quella del triangolo proposto. Colla costruzione del problema 82, si trovino i lati dei due quadrati equivalenti rispettivamente ai due triangoli dati: e sia GH quello del quadrato equivalente al triangolo abc, e KL il lato di quello equivalente all'altro DEF.

Dovendo la superficie del triangolo da costruirsi essere quadrupla di quella del triangolo DEF, per ciò colla costruzione della fig.a 113, si troverà il lato di quel quadrato che sia quadruplo del quadrato equivalente al corrispondente triangolo, e del quale abbiamo trovato il lato KL; ma nel caso nostro, essendosi stabilito il rapporto di

1 : 4,

1:4, se supponiamo il lato $RL = \sqrt{1}$, sarà $2RL = \sqrt{4}$, e perciò basterà raddoppiare questo lato RL, per avere il lato del quadrato cercato, cioè quadruplo di RL^2.

Ora con raggi eguali, uno = 2RL, l'altro a GH, e da uno stesso centro O si descrivano i due cerchi M I II, N 1 2: e sulla circonferenza del cerchio di raggio GH si collochino come corde e tanti successivi lati di essa, i lati del triangolo abc, al quale dev'essere simile il triangolo da costruirsi. Finalmente dalle sezioni M, I, II, e III, della circonferenza predetta, come centri, e con raggio qualunque MN, si facciano sulla circonferenza del cerchio esterno di raggio = 2RL, altrettante sezioni N, 1, 2, e 3. Saranno N 1, 1-2, 2-3 i lati del triangolo cercato, simile al triangolo abc, e quadruplo in superficie all'altro triangolo DEF, come fu proposto.

262. Avvertimento. Se la circonferenza del cerchio M-II III, non fosse capace di contenere tutti i lati del triangolo proposto, si potrà in tal caso raddoppiare il suo raggio, ed anche triplicarlo ove occorra, senza che per ciò si alterino i termini del rapporto stabilito, nè i lati della figura che si cerca; qualora però si duplichi o si triplichi anche il raggio dell'altro cerchio N 1 2.

Problema 104.

263. Dati due poligoni qualunque abcdefgh, LMNP2, fig.ª 119, trovare i lati di un terzo poligono, che riesca della stessa

simile

simile ad uno dei poligoni dati, per esempio al poligono LMN92, e triplo in superficie all'altro poligono abHH proposto.

Soluzione. Colle costruzioni dei problemi 87 e 83, 4 trovino i lati dei due quadrati equivalenti rispettivamente ai due proposti poligoni: e sia ab il lato del quadrato equivalente al poligono abHH, cd quello del quadrato equivalente all'altro poligono LMN92. Mediante la costruzione della fig.a 113, si trovi inoltre il lato del quadrato triplo in superficie al quadrato equivalente al poligono abHH, di cui si è trovato il lato ab, e sia ef.

Coi due lati cd, ef presi per raggi, da un qualunque punto S come centro si descrivano i due soliti cerchi concentrici e III VI; 4 e 6. Quindi si decomponga il poligono LMN92, al quale dev'essere simile il poligono da costruirsi, in tanti triangoli mediante le diagonali 22, 2M, 2N, 2Q, e da un punto E, preso a piacere sulla circonferenza del cerchio di raggio cd, si applichino come corde a tanti archi del cerchio stesso, le diagonali precedenti e i due lati 2P, 2R; contrassegnando i punti di sezione colle cifre I, II, III, IV, V, e VI. Finalmente da tutti i punti E, I, II, III, ec., come centri, e con raggio arbitrario E2, si facciano sulla circonferenza del cerchio esterno di raggio ef, altrettante sezioni 21, 1, 2, 3, ec. Saranno 21, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, i lati e le diagonali colle quali si costruirà il nuovo poligono, col metodo già noto e particolarmente

indicato

indicato nella soluzione del problema 79: e questo poligono sarà simile al poligono LMN, e di superficie tripla dell'altro poligono abcd, come fu proposto.

Problema 102. N. 77

264. Dati due triangoli qualsivoglia abc, def, fig. 120, trovare i lati di un terzo triangolo simile ad uno dei due dati, per esempio, al triangolo def, e la cui superficie sia o una metà, o un terzo, o ec. di quella dell'altro triangolo proposto abc.

Soluzione. Trovati i lati dei due quadrati rispettivamente equivalenti ai due triangoli dati (problema 84), per esempio ab, cd: colla costruzione del problema 95 si trovi il lato del quadrato, la cui superficie sia $\frac{1}{3}$ di quella del quadrato equivalente al triangolo abc, del quale si è trovato il lato ab. Quindi coi due lati e f, che supporremo, sia quello del quadrato $= \frac{1}{3} ab^2$, e cd, come raggi, e da uno stesso centro O si descrivano i detti due cerchi, e sulla circonferenza di quello di raggio cd, si sottochino come corde i lati del triangolo def, a cui deve essere simile quello che si cerca, cominciando a portarle da un punto M qualunque della circonferenza predetta, e contrassegnando le sezioni colle cifre I, II, e III. Finalmente dai predetti punti di sezione M, I, II, III, come centri, e con qualsivoglia raggio MN, si facciano sulla circonferenza dell'altro cerchio, di raggio e f, altrettante sezioni N,

1, 2, 3.

1,2,3. Saranno N-1, 1-2, 2-3, i lati del triangolo che si ricerca; il quale si costruirà come è noto.

Problema 103.

265. Dati due poligoni qualunque abcdh, LMNPQ, fig.ª 119, trovare i lati di un terzo poligono, che riesca simile ad una qualsivoglia dei due poligoni dati, per esempio al poligono LMNPQ, e la cui superficie sia tre volte minore di quella dell'altro poligono abcdh.

Costruzione. Nella costruzione del problema 102, basterà cambiare il raggio e f del cerchio 1 2 3, per avere la soluzione del problema presente.

Trovati, come nella soluzione del citato problema, i due lati a b, ed i quadrati equivalenti rispettivamente ai due proposti poligoni; nella costruzione del problema 95, si troverà il lato di quel quadrato, la cui superficie sia $\frac{1}{3}$ di quella del quadrato il cui lato è rappresentato da a b, e ciò per la supposizione e f. Si procederà nella costruzione in modo affatto simile, a quello del problema col predetto, e si avranno 1-1, 1-2, 2-3, 3-4, ec., per i lati e le diagonali del nuovo poligono; il quale costruito col metodo già noto, riuscirà necessariamente simile al poligono LMNPQ, e di superficie tre volte minore di quella dell'altro poligono abcdh, come si ricercava.

266. L'avvertimento fatto al §. 262, conviene alle costruzioni di tutti quei problemi, nella soluzione dei qua-

li

quali intervengono i suddetti due cerchj. E qui lo ricordiamo per il caso che la circonferenza del cerchio C III. VI, non fosse capace di contenere i lati e le diagonali del poligono L IV B 2, nel quale sarà spediente il far uso del ripiego in quell'avvertimento suenunciato.

Problema 104

267. Dato un numero qualunque di poligoni, per esempio i quattro poligoni a, b, c, d, fig.ª 121, trovare i lati di un quinto poligono simile ad uno qualsivoglia dei dati, per esempio simile al poligono d, e di superficie equivalente a quella degli altri tre poligoni dati a, b, c, presi insieme, ovvero sommati insieme.

Soluzione. È chiaro che nelle soluzioni dei precedenti problemi, si trova la soluzione anche di questo. Poichè, se colla costruzione del problema 90, si troverà il lato del quadrato equivalente ai tre poligoni dati a, b, c, e quindi colla costruzione dell'altro problema 94, si troverà il lato di quel quadrato che sarà quintuplo in superficie al quadrato predetto, il lato di questo, che supporremo sia E F, sarà il raggio col quale si descriverà uno dei due cerchj già noti.

Trovato inoltre il lato del quadrato equivalente al quarto poligono d (problema 87), che supporremo sia G H: sarà questo il raggio col quale si descriverà il secondo cerchio. Ora, coi trovati due lati E F, G H presi come

come raggi, da uno stesso centro, preso a piacere, si descrivano i detti due cerchj; e condotte nel poligono D, da uno qualunque dei vertici, tutte le diagonali a tutti gli altri angoli non adiacenti, si collochino come corde a tutti archi della circonferenza del cerchio di raggio Et, le diagonali predette non che i due lati contigui al vertice medesimo: e da tutte le sezioni della circonferenza di quel cerchio come centri, e con raggio arbitrario si facciano altrettante sezioni sulla circonferenza del secondo cerchio di raggio Ez; nelle corde degli archi determinati da queste ultime sezioni si avranno i due lati e le diagonali per costruire il cercato poligono, il quale dovrà necessariamente riuscire simile al poligono dato D, e quintuplo in superficie degli altri tre A, B, C, uniti insieme, come si ricercava.

Problema 105.

268. Dato un numero qualunque di poligoni, per esempio i quattro poligoni A, B, C, D, fig.a 121, trovare i lati di un quinto poligono simile ad uno qualunque dei proposti, per esempio al poligono D, e la cui superficie sia un quinto di quella degli altri tre poligoni A, B, C, presi insieme.

Soluzione. La costruzione di questo problema sarà in tutto simile a quella del problema precedente, ad eccezione del lato Ez, il quale se pel rapporto stabilito

stabilito in quel problema appartenere doveva ad un quadrato quintuplo in superficie ai tre poligoni A, B, C, presi insieme, deve in vece il lato medesimo in forza del rapporto notato dal problema precedente esprimere la radice quadrata di un quinto della superficie dei tre poligoni predetti, dominato insieme. Per la qual cosa mediante le costruzioni dei due problemi 90, e 95, si troverà il lato del quadrato, la cui superficie sia un quinto della somma di quelle dei tre poligoni A, B, C. Col lato di questo quadrato preso per raggio, e dallo stesso centro, dal quale si sarà descritto il cerchio di raggio III, si descriverà il secondo cerchio.

Terminata la costruzione nel modo indicato nel citato problema 104, si avrà quanto occorre per la soluzione del problema presente.

Ciò mi sono alquanto diffuso nei problemi di questo Libro IX, il feci colla lusinga che, e per la novità dei problemi medesimi, i quali non furono mai, ch'io sappia, da altri proposti, e per la semplicità e geometrica eleganza della loro costruzione, potranno essi tornare di qualche utilità ai Geodetici ed ai periti agrimensori, in ciò che riguarda le operazioni di Planimetria; non che alle arti meccaniche.

Libro

Libro X.

Di alcune unità di misure lineari; della costruzione delle Scale Geometriche, e dei differenti loro rapporti

Nozioni preliminari.

269. Le unità di misure lineari prendono nomi diversi a seconda delle differenti loro lunghezze, e del differente numero delle parti nelle quali l'unità è divisa.

270. I nomi delle principali misure lineari in uso presso di noi, sono; rispetto agli usi Geografici il Miglio, e la Lega terrestre, e Marittima. Riguardo agli usi Architettonici, a quelli delle arti meccaniche, ed a quelli del commercio, il Metro, la Pertica, il Passo, il Piede, il Braccio, ec:.

271. Il Modulo è una misura lineare inventata dagli Architetti, e da essi ricavata dal Diametro dei fusti delle Colonne dei differenti Ordini.

272. Le Scale, puramente dette, consistono in una sola linea retta, divisa, e suddivisa in parti eguali, e servono a determinare ed a valutare le grandezze degli oggetti, che si vogliono rappresentare.

273. Le Scale Geometriche poi sono quelle formate da più linee parallele, rappresentanti delle parti, delle

quali

guali la suddivisione è determinata da altre linee obliq.

244. Il Metro, che è la diecimilionesima parte della distanza dal polo all'equatore, ossia d'un quarto del meridiano terrestre, misurata e calcolata secondo il metodo del celebre Delambre, del meridiano che passa per Parigi, è diviso in dieci parti eguali che si dicono decimetri; ogni decimetro in altre dieci parti eguali che si dicono centimetri; e ogni centimetro è diviso in altre dieci parti eguali, che si dicono Millimetri; così che il metro, o l'unità di misura metrica lineare è divisa in mille parti.

245. La pertica è una misura lineare usata dagli agrimensori. Essa consta di dei piedi, ovvero è divisa in dei parti eguali, ciascuna delle quali corrisponde ad un piede.

246. Il Passo è una misura lineare usata principalmente dai muratori, e dai falegnami di grosso. Consta esso di cinque piedi, ovvero è diviso in cinque parti eguali, ciascuna delle quali cinquetta di un piede.

247. Il Piede è una misura lineare, di cui l'uso è generale a tutte le arti meccaniche, e di costruzione, e è diviso esso in dodici parti eguali, che dicons pollici (e dalla maggior parte degli Artefici once); ogni pollice è diviso in altre dodici parti eguali che si dicono linee; ogni linea in dieci parti eguali, che si dicono punti.

248. Essendo il Metro oggidì nelle mani presso che di tutti

tutti gli Artefici più che non lo è il piede, stimo perciò cosa utile il far qui conoscere il rapporto fra queste due misure lineari, non che il modo di ridurre un numero qualunque di Metri in piedi, e viceversa; ben inteso ch'io

on di quelli d'altri
odo di differenti lun
pporto col Metro me

il piede del Friuli;
mero di metri in
versa.

1506 $\frac{2}{3}$ decimi di linea
1440 decimi di linea,

iedi 2, pollici 11, linee
llici 11, linee 3, e $\frac{681}{1000}$
$\frac{3681}{1000}$ di linea
l'esso $\frac{144000}{1000}$ di linea:
Metro. E reciprocamen
Friuli.

narie in frazioni deci
endesi a 0,33987835; e

... ridurre un numero qualsivoglia di piedi Friula-
ni

Avvertimenti di pratiche necessarie secondo 'l costume di Venezia, Padova, ed altri luoghi.

Il Ducato corrente è lire 6. soldi 4.
Lo Scudo è L. 12. Soldi 8. La Lira è Soldi 20.
Il Soldo è denari 12.
Lo Staro della Farina di Frumento colla Crusca che si vende al Fondaco di Venezia pesa Lib. 132.
Una Quarta pesa Lib. 33.
Moggio di Frumen., ed altre Biade è sacchi 3. il Sacco è St. 4, lo Staro è Quart. 4, il Quart. è Mis. 14.
Lo Staro della Farina di Frumento, che si vende al Fondaco burattata senza Crusca pesa Lib. 32, e colla Semola pesa Lib. 40.
Il Carro di vino ordinario è mast. 10. un mastello è 4 Quarti, un Quar. è Inghist. 18. e a Bassan. Q. 18.
Una Libbra grossa è Oncie 12. grosse
Una Libbra sottile è Oncie 12. sottili.
La Libbra grossa fa al sottile Oncie 15. e 4. Quinti.
La Libbra sottile fa al grosso Oncie 8. e 4. Settimi.
Libbre 100 grosse fa Lib. 120. sottile.
Libbre 100 sottili fa lib. 71, e 3 Settimi grosse.
Brac. 100 di Panno fa Brac. 106, e 2 Quinti di Seta.
Braccia 100 di Seta fa Braccia 49 di Panno.
Un Marco d'Oro ed Argento è Oncie 8.
Un' Oncia è quattro Quarti, un Quarto è Caratti 36, un Caratto è Grani 4.
Una Lib. Specieria è Oncie 11. Un Oncia è Dram. 8.
Una Dramma è Scrupoli 3.
Una Lib. di Seta è Oncie 12. un' Oncia è Sazi 8.
Il viaggio d'un Migliajo è 100 Passi Veneziani.
Il Passo è piedi 5. ch'è l'altezza d'un Uomo ben formato coi quale si misurano le Fabbric. ed altro.
La Pertica è misura di piedi 6., colla quale si misurano i Terreni, ed il Piede è oncie 12.
Un Campo di Terreno Padovano è Tavole 840, ed una Tavola è Piedi sei per ogni verso in Quadr.

guali la suddivisione è determinata da altre linee oblique.

274. Il Metro, che è la dieci milionesima parte della Distanza dal polo all'equatore, ossia d'un quarto del meridiano terrestre, misurata e calcolata secondo i metodi del celebre [illegible] Parigi, è diviso in [illegible] tri; ogni decimetro [illegible] di Centimetri; ed [illegible] ci parti eguali, che [illegible] tro, o l'unità di [illegible] mille parti.

275. La pertica [illegible] maggiori. Essa con [illegible] parti eguali, cias[illegible] Dei.

276. Il Passo è [illegible] mentre dai mura[illegible] esso di cinque pi[illegible] ciascuna della [illegible]

277. Il Piede è [illegible] rale a tutte [illegible] Si divide esso in [illegible] (e dalla maggior pa[illegible] è diviso in altre 12 [illegible] d'ogni linea in dieci

278. Essendo il Metro [illegible]

Tutti

14 **MODO DI SOMMARE.**

Lire 536	soldi 16	denari 6
429	19	8
345	12	7
299	19	9
84	11	10
76	16	8
8	3	5

Somma Lire 1782 soldi 0 denari 5

Imparato che si avrà il Libretto, che è il conoscere i numeri, e saperli leggere, si fanno le summe di Lire, soldi, denari, come qui sopra, cominciando alla colonna dei denari, che sono 5, e 8 fa 13, e 10 fa 23, e 9 fa 32, e 7 fa 39 e 8 fa 47, e 6 fa 53, dai quali denari si fanno soldi, e perchè sappiamo che ogni 12 denari fanno un soldo, bisogna veder quante volte si può cavar 12, si cava quattro volte, ed avanzerà 5 denari da porre sotto la riga de'denari, poi 4 soldi summano cogli altri soldi, e si fa così, 4, e 3 fa 7, e 6 fa 13, e 1 fa 14, e 9 fa 23, e 2 fa 25, e 9 fa 34, e 6 fa 40, si mette 0, si tiene quattro decine, e si dice 4 e 1 fa 5, e 1 fa 6, e 1 fa 7, e 1 fa 8, e 1 fa 9, e 1 fa 10, e perchè una Lira è soldi 20, che sono due volte 10, però pigliamo la metà delle decine, che sono 10, la metà è 5, e farà Lire 5 da sommarsi colla prima colonna delle Lire, che farà 5 e 8 fa 13, e 6 fa 19, e 4 fa 23, e 9 fa 32, e 5 fa 37, e 9 fa 46, e 6, fa 52, si mette il numero, e si tiene le 5 decine poste colla seconda colonna che sono 5, e 7 fa 12, e 8 fa 20, e 9 fa 29, e 4 fa 33, e 2 fa 35, e 3 fa 38, si pone il numero 8 e si tiene il 3 da sommare colla terza colonna, che fa 3, e 2 fa 5, e 3 fa 8, e 4 fa 12, e 5 fa 17, che sono Lire 1782, soldi 0, denari 6 e così è sommato.

tuoi gli Artefici più che non lo è il piede, stimo per ciò cosa utile il far qui conoscere il rapporto fra queste due misure lineari, non che il modo di ridurre un numero qualunque di Metri in piedi, e viceversa; ben inteso ch'io qui parlo del piede del Friuli, e non di quelli d'altri paesi, i particolari piedi de' quali essendo di differente lunghezza, sono per ciò in differenti rapporti col Metro medesimo.

Capitolo I

Del rapporto fra il metro e il piede del Friuli; e mezzo di ridurre qualunque numero di metri in piedi del Friuli, e viceversa.

279. Contenendo il piede del Friuli 1506 $\frac{2}{3}$ decimi di linea del piede di Parigi diviso giusto, ovvero in 1440 decimi di linea, risulta che

280. Il Metro corrisponde a Friulani piedi 2, pollici 11, linee 3, e $\frac{681}{1000}$ di linea. Ridotti i piedi 2 pollici 11, linee 3 e $\frac{681}{1000}$ in millesime parti di linea, si avrà $\frac{423681}{1000}$ di linea

281. Contenendo il piede Friulano anch'esso $\frac{144000}{1000}$ di linea: ne viene che il piede è $\frac{144000}{423681}$ di un Metro. E reciprocamente il Metro è $\frac{423681}{144000}$ di un piede del Friuli.

Ridotte queste due frazioni ordinarie in frazioni decimali, si troverà la prima corrispondere a 0,339787835; e la seconda a 2,942229166.

282. Volendosi ridurre un numero qualunque di piedi Friulanei

lani, in Metri, basterà moltiplicare la frazione 0,33987835 per il dato numero di piedi, e si avranno i metri corrispondenti: e viceversa per ridurre un numero qualunque di Metri in piedi del Friuli: si moltiplicherà il loro numero per 2,94222916 6.

283. Esempio I. ci voglia ridurre in Metri, piedi Friulani 948. Fatta, come sopra, la moltiplicazione di 0,33987835 per 948, si avranno Metri 332 e 206 Millimetri circa.

284. Esempio II. Vogliasi ridurre Metri 785 in piedi del Friuli. Moltiplicando, come si è detto, il numero 2,94222916 6 pel numero 785; si troverà piedi 2309 più la frazione 0,64989331, che ridotta ~~[illegible]~~ in pollici moltiplicandola per 12, si avranno 7 pollici e la frazione 0,79864372, che ridotta in linee moltiplicandola per dodici, darà linee 9, e $\frac{594}{1000}$ di linea.

285. Corrispondendo il piede Friulano a Metri 0,33987835; ne segue che il pollice corrisponde a Metri 0,02832319; e la linea a Metri 0,00236026 5.

286. La Pertica Friulana pegli usi dell'Agrimensura corrisponde a Metri 2,03927 01.

287. Il Passo del Friuli a Metri 1,69939175.

Da questi due esempj riuscirà agevole il metodo di ridurre qualunque altra misura lineare a valore Metrico, e viceversa, subito che si conosca il rapporto tra le misure, che si vogliono convertire l'una nell'altra.

Capi-

Capitolo II

Della costruzione delle Scale geometriche, e del modo di prendere sopra di queste le occorrenti misure.

Problema 106.

288. Data la retta MN, fig.a 122, per unità di misura metrica, costruire la Scala Geometrica di Metri.

Soluzione. Sopra una retta indefinita AB, da un punto qualunque di essa, per esempio dalla estremità B, si porti la data unità o metro MN, tante volte quante di voglia, o quante ne esigessero le grandezze dei disegni, ai quali servir dovrà la scala, che si costruisce, per esempio sette volte, come nella presente figura, e si marchi col 0 il primo metro a sinistra, e progredendo a destra si marchino le altre divisioni colle cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6 ec., come si vede nella figura. Poichè il primo metro a sinistra Ao, non forma parte delle unità, o dei metri de' quali è composta la Scala, ma servir deve unicamente alle frazioni dell'unità medesima, ovvero decimetri, centimetri ec.

Da tutti i punti o, 0, 1, 2, 3 ec., della AB, si calino altrettante rette indefinite ad, oE, 1f, ec., tutte normali alla AB; e sopra la ad, cominciando da o, si porti una misura qualsivoglia Aa, tante volte quante dovute le parti nelle quali è divisa l'unità di misura proposta, che nel caso nostro essendo il Metro si porterà per

ciò

ciò dieci volte, e si marchino i punti di divisione colle lettere a, b, c, ec.; conducendo da tutti questi punti altrettante rette ak, bl, ec., tutte parallele alla AB, ed eguali a questa.

Dalla prefata costruzione risultano sette parallelogrammi rettangoli, de' quali il primo a sinistra AoED contener deve le parti del Metro; al cui effetto si condurrà la diagonale oD, la quale intersecando le rette parallele alla AB, darà nei punti di sezione i decimetri, ovvero le decime parti dell'unità proposta; le quali cominciando da o, si marcheranno colle cifre numeriche progressive 1, 2, 3, 4, ec., come lo mostra la figura.

Se i dettagli del disegno che si vuole delineare, non abbisognassero di una scala la cui unità fosse divisa in più minute parti o suddivisioni, ma bastassero i soli decimetri; la scala così costruita somministrerà tutte quelle misure, che potessero occorrere onde determinare le dimensioni del disegno; e queste misure poi si prenderanno dalla scala, come sarà in appresso indicato.

Debbasi, a cagion di esempio, prendere dalla scala Metri 1,30: cioè un metro e tre decimetri; si fissi una delle punte del compasso nel punto di sezione della retta 1F, colla retta ~~~~ cm, e si aprino le gambe del compasso finchè l'altra punta mobile giunga nel punto 3, punto di sezione della retta cm, colla diagonale oD, e questa sarà la misura cercata.

Se, per secondo esempio, si dovessero prendere Met.ⁱ 3,70:

cioè

cioè metri tre e sette decimetri; si fissera una delle punte del compasso nel punto di sezione della retta 3H, colla gg, aprendo il compasso finchè l'altra punta giunga nel punto 7, punto di sezione della gg colla diagonale od, e questa sarà la misura voluta.

289. Nel centrare la prima punta del compasso, e nell'aprirlo finchè l'altra punta giunga nel punto di sezione voluto, devesi por mente che le punte medesime coincidino esattamente colle sezioni delle rette anzidette, mentre non coincidendo esse esattamente, la misura presa darà o minore o maggiore della voluta.

290. Se la piccolezza dei dettagli del disegno che si vuole eseguire, esigessero parti più minute, o più suddivisioni dell'unità di misura per poterli determinare, in questo caso si dovrà costruire una scala geometrica in modo, che ne risultino anche i centimetri; e questa seconda suddivisione si farà nella maniera che sarà tosto indicata nella soluzione del problema che segue.

Problema 104.

291. Data l'unità di misura metrica nella retta ao, fig.re 123, già divisa in decimetri, mediante la costruzione del problema precedente 103; suddividere ogni decimetro in altre dieci parti eguali, onde avere il metro diviso in centimetri.

Soluzione. Per tutti i punti d'intersezione 1, 2, 3, ec., della diagonale od colle rette aH, bl, cm, ec. si conduca

cano altrettante rette 1 G, 2 H, 3 K, ec: tutte parallele al la AD. Queste rette divideranno tanto la AO, quanto la DO, ciascuna in 9 ciei parti eguali: delle quali quelle della AO, si marchino come nella figura da destra a si nistra, cioè da A verso O, coi numeri progressivi, 1, 2, 3, 4, ec:. Quindi congiunti a due a due i punti di divisione delle predette due rette, nel modo indicato nella figura, cioè O con G, 1 con H, 2 con K, ec., fino agli ultimi due 9 con D; i punti d'intersezione di queste obbligue colle a K, b L, cm, ec., faranno la divisione di ogni decima parte della AO in dieci parti eguali, e quindi il metro AO diviso in cento parti eguali, cioè in centimetri.

292. Osservazione. Essendo il parallelogrammo rettangolo AO ED, diviso in dieci parallelogrammi rettangoli eguali dalle rette 1 G, 2 H, 3 K, ec.; ed essendo ogn'uno dei lati O1, 1-2, 2-3, ec., dei parallelogrammi predetti, diviso in dieci parti eguali dalle rispettive diagonali O G, 1 H, 2 K, 3 L, ec.; ne segue che la AO, ovvero il metro, è diviso in cento parti eguali, coi punti d'intersezione delle obbligue O G, 1 H, 2 K, ec., colle a K, b L, cm, ec..

293. Avvertimento. Al oggetto però di semplificare più ch'è possibile la scala, e di evitare la confusione che cagionerebbono molte linee, non si riterranno se non quelle, che nella figura sono continuate: e si cancelleranno le altre che sono punteggiate: bastando alla chiesta divisione le prime sole.

294. Le scale geometriche di Metri suddivisi in centimetri, dimandano una maggior attenzione, nel prendere, sopra di esse le occorrenti misure, che non abbisogna per quelle divise in soli decimetri. Per la qual cosa reputo cosa utile l'additare il modo di prendere le ~~occorrenti~~ misure anche sopra di queste, di cui la struttura è di più difficile intelligenza.

295. Debbasi prendere, per esempio, Metri 0,76 cioè sette decimetri e sei centimetri. È chiaro che non essendovi in questa misura interi, una delle punte del compasso si dovrà fissare sopra la retta oE, ch'è appunto la linea che separa gl'interi dalle frazioni o parti dell'intero; e fissarla precisamente nel punto di sezione di questa retta colla fp, che porta il numero dei centimetri; quindi aprire il compasso finchè l'altra punta mobile giunga nell'altro punto di sezione della retta predetta fp colla diagonale 7P, e questa sarà la voluta misura.

296. Inoltre se si dovesse prendere sopra la scala medesima Met.[i] 2,470; cioè metri due, decimetri quattro, e sette centimetri: si fisserà una punta del compasso nel punto d'intersezione delle due rette BC, qq' e si aprirà il compasso finchè l'altra punta giunga nel punto d'intersezione della predetta retta qq colla diagonale 4M; e questa sarà la misura cercata.

297. Da questi due esempj si vede cosa si dovrà fare, quando si trattasse di prendere dalla scala misure differenti da quelle

propo-

proposta negli esempj precedenti.

298. Quantunque dopo aver costruita la scala geometrica di metri, riesca agevole il costruire qualunque altra scala, subito che si conosca in quante parti deve si dividere la unità proposta; pure trattandosi che il piede si divida in un numero di parti, differente da quello del metro: per ciò nel problema che segue offriremo il modo di costruire la scala geometrica di questa differente specie di misura lineare.

Problema 108.

299. Data la retta MN, fig.a 124, per unità di misura del piede, costruire la scala geometrica di piedi, dividendo il piede in pollici, e quindi i pollici in linee.

Soluzione. Sopra una retta AB indefinita si segnino tante parti AO, O1, 1-2, ec., quante si vogliano, tutte eguali alla data unità di misura, o presa MN: e da tutti i punti di divisione della AB, si alzino le indefinite A2, O6, 17, 2C, tutte normali alla AB. Quindi, essendo dodici le parti in cui si divide il piede, sopra la retta A2, cominciando da A, si segnino dodici parti eguali di misura qualunque ad a, e si guidino altrettante rette ab, cd, ef, gh, ec., tutte parallele alla AB; e condotta la diagonale Od, si avranno nei punti di sezione di questa colle ab, cd, ef, ec., i dodici pollici, che di contrassegneranno colle cifre 1, 2, 3, ec., come si vede nella figura.

Se

Se la piccolezza del disegno da eseguirsi, ed il genere dei suoi dettagli non esigessero, o non ammettessero ulteriori suddivisioni, la scala così costruita somministrerà le occorrenti misure. Se poi la grandezza del disegno e delle sue parti domandasse una scala di piedi, nella quale ogni parte della divisione del piede in pollici, si abbia anche il pollice diviso in linee, questa seconda divisione si otterrà come segue

Per tutti i punti d'intersezione della diagonale o2 colle rette ab, cd, ec., si guidino altrettante rette tutte parallele alla a2, le quali divideranno le due ao, 2E, ognuna in parti dodici eguali, e si notino quelle della ao, da destra a sinistra colle cifre 1, 2, 3 ec., e quelle della 2E, colle lettere G, H, I, K ec.. Si congiungano a due a due i punti predetti colle obblique oG, 1H, 2I, 3K, ec., e queste obblique saranno nei punti d'intersezione colle ab, cd, ef, ec., suddivisione in dodici parti eguali, ovvero in linee di ogni pollice corrispondente o1, 1-2, 23, ec.; e conseguentemente l'unità di misura ao, sarà divisa in 144 parti eguali, ovvero linee.

I numeri posti alle divisioni della retta ao esprimono pollici, e quelli posti alle divisioni della oE denotano linee. Anche in questa scala non si conserveranno se non che le rette oI, 1H, 2I, 3K, ec., e si cancelleranno le punteggiate 1G, 2H, 3I, 4K, ec.

Delle Scale Geometriche
di Moduli.

300. Il modulo, della qual misura abbiamo parlato al §. 241, è una misura lineare della quale non si fa uso se non che nell'Architettura Estetica. Variano gli Architetti nella Divisione del modulo; alcuni lo hanno diviso in parti sessanta; altri in trenta parti eguali: ma la divisione oggidì generalmente adottata è in parti dodici, e in parti diciotto: Il modulo diviso in parti dodici eguali serve agli Ordini robusti, perchè composti di grandi membri, come sono il Toscano, e il Dorico; e il modulo diviso in parti diciotto serve agli Ordini gentili, cioè allo Jonico, Corintio, e Composito, i quali perchè composti di membrature più minute, richiedono per ciò una scala, di cui l'unità sia divisa in parti più minute.

301. La costruzione della scala geometrica di moduli, in cui l'unità è divisa in parti dodici eguali, essendo in tutto simile a quella della fig.ª 124., ci dispensa dal qui offerire una particolare figura; nè vi ha altra differenza se non che le divisioni della retta oE, in vece di portare le cifre 1, 2, 3, ec., saranno contrassegnate colle frazioni ordinarie $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, ec., che per questo motivo si sono poste a fronte delle prime nella stessa fig.ª 124.

302. La scala geometrica di moduli, la cui unità è divisa in parti diciotto, sarà del pari simile alla predetta in ogni parte della costruzione, fuorchè nella divisione della

ao,

do, la quale in vece di dovrà dividere in parti diciotto eguali, e di porranno alle divisioni della o & le medesime frazioni superiormente indicate.

303. Le frazioni, o parti aliquante di minuto, che di ottengono da questa costruzione, e che sono $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, ec., essendo quelle stesse che spesso s'incontrano nelle dimensioni delle parti componenti gli ordini di Architettura; però sarà cosa utile e per l'esattezza e per la speditezza della delineazione dei disegni architettonici, l'averle in pronto, e con geometrica esattezza determinate nella scala medesima.

Capitolo III.

Del rapporto geometrico fra due scale della medesima specie.

Nozioni preliminari.

304. Che cosa sia rapporto o ragione geometrica, l'abbiamo già definito nel Libro IV. § 131., qui aggiungeremo che

305. Si potrà determinare il rapporto fra due rette con una data e medesima unità di misura, e con una stessa scala; per esempio se fosse data una retta lunga Met. 3,27, e si dovesse descrivere un'altra di lunghezza tripla della data, o pure un terzo; dovrà nel primo caso prendere dalla scala medesima, colla quale la data linea contiene Metri 3,27, metri 9,81 e determinare di questa lunghezza la nuova retta, che sarà così tripla della proposta: ovvero

nella

ovvero nella seconda ipotesi, prendendo sulla scala stessa Metri 1,09 e quindo eguale a questa misura la nuova retta, sarà questa un terzo della proposta.

306. Non è però lo stesso allora quando si tratta delle superficie, le quali abbracciano due dimensioni lunghezza cioè e larghezza. Per determinare un rapporto qualsivoglia fra due superficie, o figure qualunque, occorrono due scale le cui unità di misura esprimano le radici dei numeri, o dei termini del voluto rapporto.

307. Se a cagion di esempio si delineassi una figura, ovvero un disegno qualunque, avendone determinate le dimensioni mediante una data scala qualunque: e mi proponessi di farne un secondo simile, ma di grandezza o di area doppia di quella del primo. In tale caso essendo il rapporto stabilito di 1:2; converrà perciò che l'unità di misura della nuova scala, che servir deve a delineare il secondo disegno sia $=\sqrt{2}$, supponendo si che l'unità di quella del primo disegno sia $=\sqrt{1}$.

La costruzione del problema 94, fig.a 113, del libro IX, somministra il modo di determinare le unità di misure superficiali, ovvero qualsivoglia rapporto fra due scale della stessa specie; il che si vedrà nel problema che segue.

Problema 109.

308. Data la retta ab, fig.a 125, per unità di misura di una scala, colla quale fu eseguito un tale disegno qualunque,

lunque, trovare l'unità di misura di una nuova scala, col-
la quale costruendo un disegno simile al proposto, la su-
perficie del nuovo disegno riesca quintupla di quella del
disegno dato.

Soluzione. Con raggio eguale alla proposta retta AB,
e da una sua estremità A come centro, si descriva un cer-
chio, e si faccia sulla sua circonferenza al raggio AB = BC
= CD = DE. Quindi si faccia a BD = Ba = Ea; ad Ea = BF; e
finalmente ad AB = BG = FG. Sarà EG = √5, eguale cioè
all'unità di misura cercata, colla quale costruendo la
nuova scala, se con questa si determineranno le dimen-
sioni del nuovo disegno, questo riescirà simile al dise-
gno proposto, e quintuplo in superficie, come si voleva.

309. Nella costruzione del problema 94 fig.ª 113, abbia-
mo la soluzione di questo problema dal rapporto di uno
a due, sino a quello di uno a dieci, ch'è quanto basta
pegli ordinarj rapporti di simili problemi. Pei rapporti
poi inversi, quantunque nella costruzione del proble-
ma 95, fig.ª 114, si trovi la soluzione, ciò non ostante
la soluzione del problema che segue, servirà a maggiore
schiarimento di questo genere di problemi.

Problema 119.

310. Data una retta AB, fig.ª 126, per unità di misura
di una scala, colla quale fu eseguito un disegno, trovare
l'unità di misura di un'altra scala, colla quale costruen-
do

struendo un disegno simile al dato, la superficie del nuovo disegno stia a quella del disegno esibito come 3 : 7.

Soluzione. Con raggio qualsivoglia si costruisca la figura 113, nella quale, supposto il raggio = $\sqrt{1}$, si avrà BD = $\sqrt{3}$, CL = $\sqrt{7}$. Con queste due radici prese per raggi, e da uno stesso centro O, si descrivano due archi indefiniti. Quindi sopra l'arco di raggio = $\sqrt{7}$, si collochi come corda la data unità di misura AB, nei due punti L M. Finalmente da questi due punti L ed M come centri, e con raggio qualunque, per esempio LP, si facciano sulla circonferenza dell'arco intermo di raggio = $\sqrt{3}$, le due sezioni PP. Sarà la corda dell'arco PP la cercata unità di misura, colla quale costruendo la nuova scala, ed eseguendo con questa il disegno simile al disegno proposto, la superficie di area del nuovo disegno sarà $\frac{3}{7}$ ~~terza~~ di quella del proposto, come si voleva.

Dalla soluzione di questo problema, e da quella dell'antecedente, si vede chiaramente cosa si dovrà fare qualunque altro fosse il rapporto stabilito fra le unità di misura in questione, o fra le aree dei disegni proposti.

Libro

Libro XI.

Della Planimetria,
ossia
Della valutazione delle Superficie

Definizioni.

311. Misurare una quantità vuol dire determinare il numero delle volte che la quantità proposta contiene o è contenuta in un'altra quantità della medesima specie. Per ciò le misure geometriche sono di tre specie, cioè di linea, di superficie, e di solidità.

312. Dicesi unità di misura quel modulo o termine di paragone, al quale si riferiscono tutte le altre, onde misurarle.

La distanza che vi è fra due dati punti essendo determinata dalla retta che li congiunge, essa si misurerà mediante un'altra retta scelta a piacere per unità di misura, ed il numero delle volte che questa retta darà in quella contenuta, ci darà la misura della proposta distanza. Così le linee spezzate, i perimetri dei poligoni, gli archi e le circonferenze dei cerchj, e altre linee curve si potranno misurare mediante un modulo lineare o rettilineo, qualora si possa assegnare delle linee rette, che le rappresentino.

313.

313. L'unità di misura ordinariamente impiegata per valutare le superficie, è un quadrato, e la ragione per cui si preferisce il quadrato a qualunque altra figura, si è che la forma sua è la più semplice, avendo il quadrato la lunghezza eguale alla sua larghezza, per cui ciascuna di queste dimensioni può essere rappresentata dalla unità lineare, mentre il quadrato esprime l'unità di superficie.

314. Quando adunque si vuol misurare una superficie, si tratta di trovare quante volte essa contiene un dato quadrato, preso per unità di misura, e perchè appunto è un quadrato la misura a cui d'ordinario si riferiscono le superficie da misurarsi, così la valutazione di una superficie qualunque in quadrati, si chiama quadratura.

315. Non si creda poi che per misurare una superficie sia assolutamente necessario un quadrato, bastando in vece uno solo de' suoi lati, il quale come abbiamo osservato qui sopra, può essere rappresentato dall'unità di misura lineare: ma bensì il numero risultante dalla moltiplicazione delle unità lineari contenute dalla lunghezza della superficie da misurarsi, per le unità contenute nella larghezza della superficie medesima, esprimerà tanti quadrati eguali, e di lato eguale all'unità di misura lineare scelta: come si vedrà dalle soluzioni dei problemi che verranno in seguito.

Prima però di trattare della valutazione o misurazione

zione delle superficie, stimiamo necessario di istruire il no-
stro lettore del valore di alcune misure superficiali, e del-
la vicendevole loro corrispondenza.

Capitolo I

Del Metro quadrato, non che del Passo e del piede quadrato del Friuli; e della vicendevole corrispondenza fra queste misure superficiali.

316. Il Metro quadrato contiene { Decimetri quadrati 100. / Centimetri quadrati 10000. / Millimetri quadrati 1,000000.

Il Decimetro quadrato contiene { Centimetri quadrati 100. / Millimetri quadrati 10000.

Il Centimetro quadrato contiene { Millimetri quadrati 100. / Decimillimetri quad.ti 10000.

317. Il Passo quadrato contiene { Piedi quadrati 25. / Pollici quadrati 3600. / Linee quadrate 518,400.

Il Piede quadrato contiene { Pollici quadrati 144. / Linee quadrate 20736.

Il Pollice quadrato contiene { Linee quadrate 144. / Punti quadrati 1440.

Ragguaglio
fra il Metro quadrato ed il Passo quadrato e piede quadrato del Friuli, e viceversa.

318 Il Metro quadrato corrisponde a { Passi quadrati --
Piedi quadrati 8, pollici quadrati 90, Linee quad.e 12.

Il Decimetro quadrato corrisponde a { Pollici quadrati 124, e Linee quadrate 30.

Il Centimetro quadrato corrisponde a { Pollici quadrati 12, e Linee quadrate 60.

319. Il Passo quadrato corrisponde a { Metri quadrati 2,8983.

Il Piede quadrato corrisponde a { Metri quad.e 0,1159336920

Il Pollice quadrato corrisponde a { Metri quad.i 0,0008050950.

320 Premesse le nozioni più necessarie intorno alle unità di misure superficiali, e ritenuto che i nostri Lettori siano istruiti del calcolo dei numeri complessi, potremmo passare ai problemi relativi alla valutazione delle superficie. Se non che potendo questa Geometria trovarsi nelle mani di chi o non ne fosse istruito, o ne avesse dimenticato le regole, mi pò lecito di qui dare la definizione di tali numeri, e di accennare

nei

nei due esempj che verranno in seguito; il metodo di moltiplicare detti numeri per ottenere i valori delle proposte superficie.

Capitolo II.

Dei Numeri complessi e degl'incomplessi.

Definizioni

321. I numeri complessi sono quelli composti di parti riferite a varie suddivisioni della stessa unità. Per esempio pie di 5, pollici 7, e linee 3, è un numero complesso, perchè composto di unità, di parti dell'unità stessa, che sono i sette pollici, e di tre duodecimi di un pollice, che sono le tre linee. Se inoltre il numero fosse composto dei 7 pollici e delle 3 linee, senza contenere nessuna unità o intero, non cesserebbe per ciò d'essere un numero complesso.

322. I numeri incomplessi sono quelli composti di sole unità intere, o di una data specie di suddivisioni. Per la qual cosa 8 piedi è un numero incomplesso, come lo è parimente 7 pollici; oppure 5 linee ec.

La fondamentale operazione mediante la quale si trovano i valori delle superficie proposte da misurarsi, è la moltiplicazione. Se poiche il più delle volte si la lunghezza, che la larghezza delle proposte superficie sono espresse da numeri complessi, per ciò nei due esempj che seguono, indicherò il metodo di operare nella moltiplicazione complessa.

Esem:

323. Esempio I. Sia di piedi 5, pollici 3, e linee 4 la lunghezza della figura, o superficie da misurarsi: e sia la sua larghezza di piedi 3, pollici 8, e linee 5. Si convertano i dati due valori, che come stanno sono complessi, in due numeri incomplessi, riducendoli cioè tutti due in linee. Si troverà la lunghezza corrispondere a linee 763, e la larghezza a linee 533. Moltiplicate una per l'altra queste due quantità, il prodotto darà 406679, che saranno le linee quadrate contenute nella superficie proposta. Quindi per convertire questo prodotto in piedi quadrati, si dividerà il numero delle linee quadrate 406679 pel numero 20736, ch'è il numero delle linee quadrate contenute nel piede quadrato, come si è veduto al §. 317., e si troveranno piedi quadrati 19, più l'avanzo 12695, che diviso per 144 (ch'è il numero delle linee quadrate contenute in un pollice quadrato), darà pol. quadrati 88, e 23 linee quadrate di residuo.

324. Esempio II. Sia l'unità di misura, scelta per valutare una data superficie qualunque, il metro. Essendo il metro diviso in parti decimali, l'operazione in questo caso riuscirà più breve, e più semplice; imperciocchè supponiamo che la lunghezza della superficie da misurarsi sia di metri 7,325: e la sua larghezza di metri 12,756. Fatta la moltiplicazione dei due trovati valori, e tagliando dal prodotto un numero di decimali eguale alla somma dei decimali contenuti nel moltiplicando e nel moltiplicatore, che nel caso nostro sono sei, si troverà che la quadra-

tura

tura della superficie proposta sarà di metri quadrati 93, 4374.

Premesse queste poche nozioni intorno alla moltiplicazione complessa, si vedrà nelle soluzioni dei problemi che seguono, qual sia il più semplice modo di misurare le superficie piane in generale, con quella geometrica esattezza, che non si ottiene co metodi ordinarj conosciuti, coi quali a sciogliere siffatti problemi s'impiega la riga e il compasso.

Capitolo III°.

Della quadratura dei poligoni in generale, ovvero delle superficie circoscritte da linee rette

Problema 11°.

325. Trovare la quadratura del poligono triangolare, o campo triangolare ABC, fig.a 127, ovvero la quadratura di un triangolo qualunque.

Soluzione. Dai due vertici A, C come centri, e coi rispettivi raggi AB, CB, si descrivano due archi che si taglino in un punto D. La quadratura cercata sarà espressa da $\frac{AC.DB}{4}$.

Sia per supposizione il lato AC di metri 17, e la distanza DB di metri 14; si moltiplichi uno per l'altro questi due valori; si divida il prodotto 238 per 4. Il quoto

59,

59,50 saranno i metri quadrati contenuti nel poligono proposto.

Dimostrazione. La BD è dopposta fatta perpendicolare, che da B cade sopra la AC. Ma l'area del triangolo ABC, è eguale alla metà dell'area di un parallelogrammo, che ha per base la AC, e per altezza la perpendicolare menata (problema 80). Dunque è eguale alla quarta parte del prodotto della AC nella BD.

Problema 112

326. Trovare la quadratura di un quadrilatero qualunque ABCD, fig.ª 128.

Soluzione. Dai vertici di due angoli opposti, per esempio A, e come centri, e coi rispettivi raggi AB, AD, CB, CD, si descrivino due archi che si taglino nei punti B', D'. Si trovino i valori, o le misure delle due distanze BB', DD'; e sieno per supposto la prima di metri 10,60: e la seconda di metri 13,40; si sommino insieme questi due valori e si avranno metri 24. Si trovi inoltre la misura della distanza dei predetti due vertici A, C, ovvero della diagonale che fosse condotta da uno all'altro di questi due punti, e sia per supposto di metri 12,25. Si moltiplichino uno per l'altro questi due valori, cioè i metri 24, per i metri 12,25; ed il prodotto, che si troverà essere di metri 294, si divida per 4. Il quoto di metri quadrati 73,50 sarà l'area cercata.

Dimostra-

Dimostrazione. Se nel quadrilatero ABCD, si guida la diagonale AC, il quadrilatero sarà da questa scomposto nei due triangoli ABC, ACD. Se, come fu dimostrato nel problema 110, l'area del triangolo ABC è eguale alla quarta parte del prodotto della BB' nella AC; del pari l'area dell'altro triangolo ADC, sarà eguale alla quarta parte del prodotto della DD' nella AC. Dunque l'area del quadrilatero ABCD è eguale alla quarta parte del prodotto della somma delle due parallele BB', DD' nella loro proiettante AC.

Problema 118.

327. Trovare la quadratura di un parallelogrammo qualunque ABCD, fig.ª 129.

Soluzione. Dai due vertici degli angoli adiacenti alla base A; D come centri, e con rispettivi raggi AB; DB si descrivino due archi che si taglino in B'. La quadratura del dato parallelogrammo sarà espressa da $\frac{AD \cdot BB'}{2}$. Per ciò trovati i valori di AD, e di BB', si moltiplichino uno per l'altro, ed il prodotto si divida per 2. Il quoto esprimerà il numero dei metri quadrati, o di qualunque altra unità di misura che si fosse scelta, contenuti nel parallelogrammo proposto.

Scolio. Se il parallelogrammo proposto per misurarsi, sarà rettangolo, in questo caso il lato AB sarebbe perpendicolare alla base AD, e per ciò trovati i valori di questi due lati, e moltiplicati tra loro, il prodotto sarà la

la superficie cercata.

Problema 114

328. Trovare la quadratura di un trapezio qualunque abcd, fig.a 130.

Soluzione. Dai vertici di due angoli opposti, per esempio a, c come centri, e coi rispettivi raggi ab, ad, cb, cd di seguino due archi che si taglino nei punti b', d'. La quadratura del trapezio proposto sarà espressa da $\frac{ac(bb'.dd')}{4}$. Perciò trovati i valori delle due bb', dd', e sia per esempio quello della bb', di piedi 4: e il valore di dd' di piedi 9; sommati insieme danno piedi 13, che moltiplicati per ac, che supponemo di piedi 15, darà piedi quadrati 195. Ora diviso questo prodotto per 4, il quoto di piedi quadrati 48, e pollici quadrati 108, darà la quadratura cercata.

Problema 115.

329. Trovare la quadratura di un poligono abcdef, fig.a 131, qualunque sia il numero dei lati rettilinei che lo circoscrivono.

Soluzione. S'immagini descritto il dato poligono in due quadrilateri abcd, adef, mediante una diagonale ad. Colla costruzione del problema 113, o dell'altro 114, antecedente, si trovino i punti d'inter-

sezione

sezione B',2' appartenenti al trapezio aBcd: e gli altri due 7,2", appartenenti all'altro trapezio adE7. Sopra la scala retta per misurare il dato poligono, e che supporremo sia stato retto il Passo, si trovino i valori delle due prime distanze BB', 22', e sia per esempio la prima BB' di passi 2, piedi 3, e pollici 3: e la seconda 22', di passi 5, e piedi 4. Si trovi inoltre la misura della distanza dei due vertici a, c, e sia di passi 7, e piedi 1.

Per la dimostrazione del problema III, la quadratura del trapezio aBcd, sarà espressa da $\frac{ac.(BB'+22')}{4}$. Per ciò sommati insieme i valori delle due BB', 22', daranno passi 8, piedi 2, e pollici 3: che moltiplicati per passi 7, e piedi 1, valore della ac, saranno passi quadrati 60, e piedi quadrati 21, che diviso per quattro, il quoto passi quadrati 15, piedi quadrati 5, e pollici quadrati 36, sarà l'area del predetto quadrilatero, o trapezio aBcd.

In modo affatto simile si troverà la quadratura dell'altro quadrilatero adE7, e trovata che si abbia si sommi con quella del trapezio aBcd, ed il prodotto darà la figura data cercata.

Dimostrazione. Resta dimostrata questa soluzione dalla dimostrazione del problema III.

330. Dalla soluzione di questo problema si vede chiaramente, che qualunque fosse il numero dei lati del poligono proposto per misurarsi; basterà decomporlo in tanti trapezj, e trovate le parziali aree dei trapezj medesimi,

sommarle

sommarle insieme; il prodotto di quelle darà la quadratura del poligono proposto.

Problema 116.

331. Trovare la quadratura di qualsivoglia poligono regolare, tra quelli che si possono iscrivere e circoscrivere al cerchio.

Soluzione. Si voglia per esempio trovare la quadratura di un pentagono regolare ABCDE, fig.a 132;

Colla costruzione del problema 68; si trovi il centro O e il raggio O7 del cerchio inscritto al dato pentagono regolare. La quadratura cercata darà espressa da $\frac{O7}{2} \times (AB+BC+CD+DE+EA)$; ovvero $\frac{O7.(AB+BC+CD+DE+EA)}{2}$.

Per ciò trovato il valore di tutti i lati del poligono regolare proposto presi insieme o sommati insieme, di moltiplichi questo per la metà dell'apotema, ovvero del raggio del cerchio iscritto O7, ed il prodotto darà la quadratura cercata.

Dalla soluzione di questo problema si vede che trattandosi di poligoni regolari, la quadratura loro si trova con molto più di facilità e speditezza, che non si ottiene quella dei poligoni irregolari.

332. Se si tratterà di trovare la quadratura di un esagono regolare, è chiaro che il centro O del cerchio iscritto si troverà ancora più facilmente, perciocchè il lato dell'esagono regolare eguaglia il raggio del cerchio circo-

scritto,

scritto, e per ciò basterà, come si è osservato nel sopranno-
minato problema 68, da due qualunque de' suoi vertici
come centri, e con raggio eguale ad uno de' suoi lati de-
scrivere due archi, e nella intersezione di questi si avrà
il centro cercato.

Capitolo IV.°

Delle superficie circolari, ovvero della quadratura del Cerchio, e delle sue parti. Problemi per approssimazione.

333. I problemi superiori al secondo grado, come sono quel-
li de' quali tratteremo in questo capitolo, non si possono ri-
solvere geometricamente colla riga e col compasso, nè con
quest'ultimo solo, ma richieggono intersezioni di curve di
gradi superiori, come sono la Cicloide, la Concoide, la
Cissoide, la Trattoria, ed altre tali curve, per descrivere
le quali furono inventati opportuni strumenti. Ciò non osta-
te, non potendosi ottenere nemmeno col mezzo di questi
strumenti tutto l'andamento di quelle curve, ma solo al-
cuni punti d'intersezione di quelle con altre linee; niegliò
è preferire all'esattezza teorica di que' metodi un'ap-
prossimazione pratica abbastanza grande, di costruzioni
fatte col solo compasso; del che si potrà persuadersi allor-
chè si farà il confronto delle soluzioni dei problemi di
questo capitolo con quelle già conosciute.

Non potendosi però ottenere colla Geometria elementa-

re

re, queste approssimazioni; non si dovrà aspettarsi di ottenerle nemmeno col solo compasso; ma le costruzioni de' problemi fatte con questo solo stromento danno una approssimazione tale, da non potersi in pratica desiderare di più.

334. La quadratura di un circolo qualunque, o di una superficie circolare, si ottiene moltiplicando la sua circonferenza per la metà del suo raggio; poichè la superficie di un circolo è equivalente a quella di un triangolo, che ha per base la circonferenza del cerchio dato, e per altezza il raggio del cerchio medesimo; per ciò trovato il valore approssimativo della circonferenza, si moltiplichi questa per la metà del raggio, ed il prodotto darà la quadratura cercata.

335. Dal non potersi ottenere la quadratura di un cerchio, se non che per approssimazione, ne segue che nemmeno la valutazione delle sue parti, come sono i settori ed i segmenti circolari, non che le corone contenute da due circoli concentrici, non si può ottenere che per approssimazione.

336. Conoscendosi però il valore approssimativo dell'arco tanto di un settore che di un segmento, ed il raggio del cerchio a cui o il settore o il segmento appartiene, si potranno valutare le superficie loro; moltiplicando cioè, per il primo, la metà dell'arco pel raggio del cerchio a cui il settore appartiene, o viceversa; poichè la superficie di un settore è equivalente a quella di un trian-

golo,

golo, che ha per base una retta eguale prossimamente all'ar-
co sopra del quale appoggia il settore, e per altezza il rag-
gio del cerchio al quale il settore appartiene. Per avere
poi la quadratura del segmento, converrà prima valuta-
re quella del settore corrispondente al dato segmento,
e sottraendo da questa la quadratura del triangolo for-
mato dai due raggi del settore colla corda del segmento
(problema 111), si avrà quella del segmento cercato.

Se fosse proposto da misurarsi l'area di un segmento
di cerchio, e non fosse noto il centro del cerchio a cui il seg-
mento appartiene; sarà d'uopo, per poter valutare la
sua superficie, trovare prima il centro del cerchio, di cui
il segmento è parte (problemi 62 e 63).

337. La quadratura di una porzione di circolo contenuta
dai due corde parallele, si ottiene sottraendo dalla super-
ficie del segmento maggiore quella del segmento minore.

338. La quadratura di una corona contenuta dai due
circoli concentrici si ottiene sottraendo dalla superficie
del circolo maggiore quella del circolo minore, valuta-
te in quadrato.

339. Il sig.r Viviani (Memoires de l'Academie de France
année 1709.) ha trovato che in un cerchio di raggio =1, iscri-
vendo un poligono regolare di 393216 lati, il perimetro di que-
sto poligono è rappresentato dal numero 6,283185307385856;
e che il perimetro del poligono simile circoscritto allo stesso
cerchio è rappresentato da 6,283185307590316. La media arit-

medica

media fra questi due perimetri è 6,283185307488086, che è prossimamente il valore della circonferenza del cerchio, e nel quale vi è contenuto non solo il rapporto di Archimede di 7:22, ma quello pure di Adriano Mezio di 113:355, ed altri anche più prossimi.

340. Ora, se per esempio si domandasse la quadratura del cerchio BCD, fig.a 133, il cui raggio AB fosse per supposto di metri 3,75; si troverà prima la circonferenza istituendo la seguente proporzione; come il raggio = 1, sta alla circonferenza = 6,283185307, così il raggio = 3,75 sta ad x, che in questo caso si troverà = 23,56194490 circa, per la circonferenza cercata. Quindi per avere, come si è detto, la quadratura del proposto cerchio BCD, si moltiplichi la trovata circonferenza per la metà del raggio, cioè per metri 1,875, e si avranno metri quadrati 44,17864668750 per l'approssimativa quadratura cercata.

341. Se invece poi si vorrà valersi del rapporto di Archimede, allora la circonferenza del dato cerchio BCD sarà espressa da $\frac{22}{7} \times 2 \cdot 3,75 = \frac{22}{7} \times 7,50 = 23,57142857$ circa; valore meno approssimato di quello ottenuto col rapporto del sig.r Nicole, ma sufficiente in molti casi. La quadratura poi del cerchio stesso si troverà, con questo rapporto, di metri quadrati 44,196428568 circa.

+ Dopo tutto ciò, vedremo ~~come~~ col solo compasso si trovi in pratica, con sufficiente approssimazione, la radice quadrata di un cerchio dato qualunque, ossia il lato di quel

quadrato

quadrato che sarà prossimamente eguale in superficie al cerchio proposto

Problema III.

342. Trovare il lato di quel quadrato, che prossimamente sia equivalente al cerchio proposto BDE, fig.a 134, di cui il raggio è AB.

Soluzione. Nella circonferenza del cerchio dato si faccia al raggio AB = BC = CD = DE; e collo stesso raggio AB, e coi centri B ed E, si descrivano i due archi AHG, AKF. Quindi di uno raggio BD, e coi centri C, e D, si descrivano i due archi HLF, KLG. Si faccia ad AL = BM = MN, ed HH = iN2. Sarà B2 il lato del quadrato cercato: ossia la radice quadrata del proposto cerchio.

Dimostrazione. Se nel triangolo isoscele CLD si dispone la base CD = 1 divisa per metà in m; si avrà $(CL)^2 = (Cm)^2 + (Lm)^2$, cioè $3 = \frac{1}{4} + (Lm)^2$; quindi $Lm = \frac{1}{2}\sqrt{11}$. Si ha poi $(Ca)^2 = (Cm)^2 + (am)^2$, e quindi $am = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sarà dunque $aL = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - \sqrt{3}) = 0,7922869$, che si trova essere corda di un arco $= 46° 40' \frac{1272}{2671} = BM = MN$. Sarà dunque l'arco $BN = 90° 20' \frac{2544}{2671}$. Siano condotte le rette BH divisa per metà in r, BD, Dr, BE: e le Dn, Hq, Kp, perpendicolari alla stessa BE nei punti n, p, q.

Essendo l'angolo $DBE = 30°$; sarà sen. $DBE = \frac{1}{2}$; cos. $DBE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sarà poi per la Trigonometria cos. $DBr = \frac{Br}{DB}$; sen. $DBr = \frac{Dr}{DB}$; cioè cos. $DBr = \frac{1}{3}\sqrt{6}$; e per essere

Dr =

$Dr = V\left[(2B)^2 - (Br)^2\right] = \frac{1}{2}V11$, sen. $DBr = \frac{1}{6}V33$. Si ha poi cos. $HBg = \text{cos.}(DBr - DBE) = \text{cos.}\,DBr.\ \text{cos.}\,DBE + \text{sen.}\,DBr.\ \text{sen.}\,DBE = \frac{1}{6}V3 \times \frac{1}{2}V3 + \frac{1}{6}V33 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}(3+V33) = \frac{Bg}{BH} = Bg$ (per essere $BH = BA = 1$). Dunque $Ag = AB - Bg = \frac{1}{12}(9 - V33)$, e quindi $gp = HK = 2Ag = \frac{1}{6}(9 - V33) = 0,5425729$, che di trova essere corda dell'arco $= 31°\,28'\,\frac{2518}{2799} = NB$. Sarà dunque l'arco $BN2 = 124°\,49'\,\frac{6320}{7476}$. La sua metà $62°\,24'\,\frac{6023}{7476}$ ha per seno $0,8863283$, e però la corda di $BN2$ sarà $= 1,7726566$. Ora posto il raggio $= 1$; si ha l'area del cerchio $= 3,1415926$, che ha per logaritmo $0,4971499$. La metà di questo logaritmo cioè $0,2485749 = \log. V3,1415926$ si trova essere logaritmo $1,7724453$. Si ha dunque l'errore di $0,0002$ circa, il che dà un'approssimazione sufficiente.

Si potrebbe inoltre dimostrare che, anche le $3H$, $3H'$ sono eguali alla AL, e che per ciò si avrebbe potuto adoperare, in luogo di quest'ultima, una delle due rette prescritte.

Problema 118.

343. Dato il lato pq di un quadrato, fig.a 135, trovare il raggio di quel cerchio, la cui superficie agguaglierà prossimamente quella del quadrato proposto.

Soluzione. Con raggio eguale al lato pq del proposto quadrato, e da un punto arbitrario A come centro,

si

si descriva il cerchio $bBDd$, e si faccia nella sua circonfe-
renza al raggio $AB = BC = CD = DE = Ed$. Col centro B, e col
raggio BD si descriva l'arco indefinito $aDNnd$, e collo
stesso raggio, e col centro E si tagli l'arco predetto in a.
Si faccia $Aa = BF = Db = db$. Quindi si faccia AB
$= Dn = dN$. Col centro C, e con raggio CN, si faccia nella
circonferenza del cerchio la sezione P. Si faccia inoltre
$Nn = PM$; finalmente si faccia $CL = \frac{7}{4}$. Sarà LM
il raggio del cerchio cercato, prossimamente equivalen-
te in superficie al proposto quadrato, di cui fu dato il la-
to nella retta pq.

Dimostrazione. Se si suppone $AB = 1$, avendo il trian-
golo BNd di questa figura i lati rispettivamente egua-
li a quelli del triangolo BdH della precedente fig.ª
134, si avrà sen. $\frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, cos. $\frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6}\sqrt{33}$.
Quindi sen. $dBN = 2$ sen. $\frac{1}{2} dBN$. cos. $\frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6}\sqrt{11}$;
cos. $dBN = \sqrt{(1 - \text{sen}^2\, dBN)} = \frac{5}{6}$. Essendo poi CBd angolo
retto, sarà cos. CBN = sen. $dBN = \frac{1}{6}\sqrt{11}$. Ma si ha dalla
trigonometria $(CN)^2 = (BC)^2 + (BN)^2 - 2\, BC . BN$. cos. CBN.
Dunque $CN = \sqrt{(4 - 2\sqrt{3} \times \frac{1}{6}\sqrt{11})} = \sqrt{(4 - \frac{1}{3}\sqrt{33})} = 1,4440025$,
che si trova essere corda di $92^\circ\, 26' \frac{804}{2013} = CP$. Essendo
poi sen. $NBE = \frac{\frac{1}{2} Nn}{BN}$ = sen. $(CBE - CBN)$ = sen. 60° cos. CBN
$-$ cos. 60° sen. $CBN = \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{6}\sqrt{11} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$; sarà $Nn = 2\, BN$
$\times$ sen. $NBE = \frac{1}{6}(3\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0,2149367$, che si trova essere
corda di $12^\circ\, 20' \frac{846}{2892} = PM$. Sarà dunque l'arco $CPM = 104^\circ$
$46' \frac{4220}{5821}$, dal quale sottratto l'arco CL, ch'è una quinta
parte

parte della circonferenza $= 72°$, resterà l'arco LM $= 32°$ $46' \frac{4220}{5821}$, la corda del quale si trova $= 0,564274$. Ora posto π il rapporto della circonferenza al diametro, ed Ro il raggio di un cerchio, si ha la sua quadratura $= \pi Ro^2$, come è noto.

Fatto dunque $\pi Ro^2 = 1$, ch'è l'area del quadrato di raggio $AB = 1$, al quale si vuole equivalente il cerchio, si avrà $Ro = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, e log. $Ro = -\frac{1}{2}$ log. $\pi = -0,2485749 = -1 + ,7514251 =$ log. $0,564189$ 6. Non si commette dunque l'errore di $0,0002$.

Problema 119.

344. Dato un cerchio di raggio AB, fig.ª 156, trovare una corda eguale prossimamente ad un quarto della circonferenza; ossia rettificare per approssimazione l'arco eguale alla quarta parte della circonferenza.

Soluzione. Nella circonferenza del dato cerchio si faccia al raggio $AB = BC = CD = DE$. Quindi si faccia $aBD = Ba = Ea$. Col centro C, e con raggio Ca si faccia sulla circonferenza la sezione 2. Sarà B2 la corda cercata.

Dimostrazione. Supposto il raggio $AB = 1$, $(aA)^2 = 2$, $(Ba)^2 = (B2)^2 = 3$, se si faccia $aC = n$, si avrà $n^2 = (aB)^2 + 2$ sen. CB. Aa. Da questa equazione risulterà $n = 43° 33' \frac{1286}{2005} = Cb$. Essendo poi BC arco eguale alla sesta

parte

parte della circonferenza = 60°; sarà per ciò Bc + cb = 103° 33' $\frac{286}{2005}$. La sua metà = 51° 46' $\frac{1145}{2005}$ ha per seno 0,7855998. Sarà dunque la corda Bb = 1,5711996. Il quarto poi della circonferenza è = 1,5707963. L'errore dunque è di 0,0004 circa.

Secondo poi il rapporto di Archimede posto il raggio = 1; si trova il quarto della circonferenza = $\frac{11}{7}$ = 1,5714285. Dunque la costruzione di questo problema dà un'approssimazione maggiore; oltre a ciò è di tale semplicità che merita d'essere in pratica preferita ad altre, dalle quali si potrebbe bensì ottenere una maggiore approssimazione teorica; ma essendo più complicate, sono più soggette ad errore.

Problema 120.

345 Nel cerchio dato BDd, fig.ª 137, trovare l'arco prossimamente eguale al raggio AB del cerchio medesimo.

Soluzione. Nella circonferenza del cerchio dato si faccia al raggio AB = BC = CD = DE = Ed. Quindi si faccia a Bd = Ba = Ea. Si faccia inoltre ad Aa = aL = BF = Db = db. Finalmente si faccia ad AB = FO, e ad Fb = OM. Sarà l'arco LeM eguale prossimamente al raggio del cerchio, come si ricercava.

Dimostrazione. Essendo $(aL)^2 = (aB)^2 - 2$ sen BL . Aa; ed essendo aL = BF = 90°; risulterà BL = 20° 42' $\frac{786}{2721}$. Essendo poi

poi OM = BF = corda della quinta parte della circonferenza, cioè di 72°, ed essendo l'arco FO = 60°; sarà l'arco FM = 12°. Quindi l'arco LM = BF − BL − FM = 57° 17' $\frac{1935}{2721}$ = 57° 17' 43" +. Si ha poi l'arco eguale al raggio = 57° 17' 44", come è noto. Dunque l'errore che si commette in questa costruzione è di un solo minuto secondo dell'antica divisione.

Problema 121.

346. Rettificare per approssimazione qualunque arco di cerchio, di cui sia noto il raggio.

Soluzione. Sia dato da rettificarsi l'arco BF, figª 138. Nella circonferenza del cerchio BDE, si faccia il raggio AB = BC = BD = DE; quindi a BD = Ba = Ea. Si trovi la quarta proporzionale alle tre Aa, AB, BF. Trovata la quarta proporzionale, che supponiamo AB', con questa presa per raggio, dallo stesso centro A, ovvero da qualsivoglia altro punto come centro, si descriva il semicerchio B'C'D'E', e si faccia a B'D' = B'a' = E'a'. Finalmente col centro C', e con raggio C'a' si tagli il semicerchio nel punto F'. Sarà B'F', ossia la corda dell'arco B'C'F', eguale prossimamente al dato arco BF.

347. Corolio. Dall'arco di pochi gradi sino a quello di 180°, la costruzione di questo problema servirà alla rettificazione di qualunque arco con sufficiente approssimazione. Se poi

l'arco

l'arco proposto da rettificarsi oltrepassasse i 180°, la corda cioè maggiore del semicerchio; come per esempio la corda dato l'arco ECG, in questo caso si dividerà l'arco proposto in due archi a piacere, per esempio nei due archi EC, CG. Quindi col metodo indicato si trovino le corde dei due archi, le quali eguaglino rispettivamente i due archi EC, CG; e unite insieme queste due corde, ovvero sommate insieme i loro valori, il prodotto darà l'approssimata rettificazione del proposto arco ECG.

368. Dalla soluzione di questo problema, semplicissima e nuova, ne viene il modo di rettificare gli archi dei settori, e dei segmenti che di volta in volta occorrerà misurare; e con maggiore approssimazione di quella che si ottiene coi metodi già conosciuti, nei quali si fa uso di semicerchj o quadranti graduati, per trovare di quanti gradi e minuti sono gli archi dei settori, e dei segmenti, per poterne valutare la superficie loro.

La mancanza della divisione in minuti primi dei gradi dei semicerchj che si adoperano in simili costruzioni, la poca esattezza delle divisioni loro, e la difficoltà del loro adattamento per trovare di quanti gradi è l'arco del settore, o del segmento proposto, non può a meno di dare risultati difettosi. A ciò si aggiunga, che se l'arco da misurarsi sarà maggiore di un semicerchio, sarà molto difficile, se non impossibile, trovare di quanti gradi egli sia, a meno che non si abbia un'intero cerchio graduato. Dopo tutto ciò sarà sempre in pratica da preferirsi la costruzione propo-

sta

proposta, a quella già conosciuta: e tanto più essa di raccomanda, in quanto che è rispettabile che se ne ottengono sono molto più approssimate.

Problema 122.

349. Trovare approssimativamente la quadratura del settore AGH, fig.a 139.

Soluzione Colla costruzione del problema 120, si trovi la corda eguale prossimamente all'arco GH, sopra del quale appoggia il settore proposto; e supponesi sia la corda B'K di metri 11,40. Supposto il raggio del cerchio, a cui appartiene il settore, di metri 7, si moltiplicheranno i metri 11,40 per metri 3,50, metà del raggio, ed il prodotto di metri quadrati 39,90, sarà l'approssimativa quadratura cercata; poichè la quadratura di un settore è eguale al prodotto dell'arco sopra cui appoggia nella metà del raggio del cerchio al quale appartiene il settore, come di è detto più sopra.

Problema 123.

350. Trovare per approssimazione la quadratura del segmento circolare BCd, fig.a 140, appartenente al cerchio BDE, di cui il raggio supporremo di metri 7,35.

Soluzione. Colla costruzione del problema 120, si trovi la

la corda eguale per approssimazione all'arco BCD del settore proposto; e supponga si via la corda BD. di metri 13,12.

Dalle estremità della corda BD del settore, intendiamo condotti al centro A del cerchio, i due raggi BA., DA., i quali determinano il settore ABCD appoggiato all'arco BCD del segmento. Si tratta di trovare la quadratura dell'immaginato settore, del quale è parte il proposto segmento BCD; moltiplicando cioè, come nel problema antecedente, metri 13,12 misura dell'arco del segmento, e lunga del quale appoggia il settore, per la metà del raggio, cioè per metri 3,775, e di avremo metri quadrati 49,4525 per la approssimativa quadratura del settore. Quindi si trovi la quadratura del triangolo BDA (problema 110), e trovata si sottragga dalla quadratura del settore per aver quella del segmento; supposta per ciò di metri quadrati 27,730 la superficie del triangolo, e dai metri quadrati 49,4525, si sottrarranno metri quadrati 27,730: l'avanzo di metri quadrati 21,7225 sarà l'approssimativa quadratura del segmento BCD.

.....

Problema 124.

.....

351. Trovare per approssimazione la quadratura della porzione di superficie circolare BCDE, fig.a 141, contenuta dai due archi CD, AB. parallele tra loro.

Soluzione. Colla costruzione dell'antecedente problema 122., si trovino le rispettive aree dei due segmenti BCE, CFD.

C79. Quindi dal valore del segmento maggiore 137e, sottraendo quello del segmento minore C79, l'avanzo darà l'approssimativa quadratura cercata, cioè l'area della porzione di cerchio BCDE....

Problema 125.

352. Trovare per approssimazione la quadratura della corona ABCDEF, fig.a 142, contenuta fra due circoli concentrici ABE, DEF.

Soluzione. Colla costruzione del problema 116, si trovino le rispettive radici dei due cerchi ABE, DEF, ovvero i lati dei due quadrati equivalenti rispettivamente ai predetti cerchi.

Supponasi che il lato del quadrato equivalente la superficie del cerchio maggiore DEF, sia di metri 14,350; e quello del quadrato equivalente il cerchio minore di metri 9,430. Le quadrature di questi due valori daranno, la prima metri quadrati 205,9225, e la seconda metri quad.i 94,6249. Ora dalla superficie del cerchio maggiore di met. quad.i 205,9225, sottraendo met.i quad.i 94,6249, di è la superficie del minore; l'avanzo met.i quad.i 111,2196 darà l'approssimativa quadratura cercata, quella cioè della corona ABCDEF proposta da misurarsi.

La costruzione di questi ultimi problemi relativi all'approssimativa rettificazione della circonferenza del cerchio e di qualsivoglia suo arco, non che alla valutazione della

della sua superficie, e di quella di ogni sua parte, bastano per risolvere qualunque problema di questo genere.

Termineremo questo libro undecimo col seguente problema relativo al ~~metodo di trovare~~ l'area di un campo, o di una superficie, qualunque sia la sua figura e grandezza.

Problema 126

353. Trovare la quadratura del campo ABCDEFGHKLMNOPQ, fig.ª 143.

.. Soluzione .. S'inscriva nel campo proposto un poligono ACRSGKMNOPQ tale, che si accosti il più che si può alla figura del dato campo; e poichè esso è in parte circoscritto da lati rettilinei, come sono i lati AQ, QP, PO, ON, NM; così questi lati formeranno parte di quelli del poligono da inscriversi.

Quindi ogni segmento MLK, KGH, GRF, ec., si decomponga nei triangoli rettangoli Mab, deK, e nei trapezj abdc, cdeL, ec., in modo che il complesso di questi differisca il meno che si può dai segmenti predetti.

Ciò fatto, coi metodi indicati nei problemi 110, 111, e 114, si trovino le aree tanto del poligono iscritto ACRSK ec., quanto dei segmenti non contenuti nel poligono predetto; si sommino insieme tutti i trovati valori, e dal prodotto si sottraggano le aree dei segmenti MLK, CDI, contenuti nell'anzidetto poligono, che come tali non fanno parte della superficie

ficie del campo proposto: ed il residuo sarà la quadratura cercata.

Libro XII.

Problemi varj.

Quantunque i pochi problemi contenuti in quest' ultimo libro si possano considerare di puro dilettamento, ciò non ostante potendo essi, a mio credere, tornare di qualche utilità in molti casi agli artisti pei loro bisogni, ed essendo a questi principalmente consacrato questo mio tenue lavoro, ho stimato conveniente cosa il proporli in questo libro.

Problema ~~126~~ 127.

354. In un dato triangolo equilatero ABC, fig.^a 144, iscrivere un esagono regolare.

Soluzione. Si divida il lato AB in tre parti eguali nei punti D.E (probl. 8.). Quindi dai punti D, E, come centri, e con raggio DE, si segnino due archi che si taglino in F. Da questo punto F come centro, e collo stesso raggio FE descritto un cerchio, la periferia di questo taglierà i

lati

lati AC, BC del proposto triangolo, nei punti L, M, G, H.

I punti D E G H dell'esagono regolare cercato, iscritto nel dato triangolo equilatero, come si ricercava.

Problema 128.

355. In un dato quadrato ABGF, fig.ª 145ª, iscrivere un ottagono regolare, ossia poligono regolare di otto lati.

Soluzione I.ª Essendo dato il quadrato, e potendo servirsi della intersezione di archi coi due lati, si disegnerà il problema come segue.

Col centro A, e col raggio AB si descriva il semicerchio BED; col centro B, e col raggio BF si segni l'arco indefinito FN, e col centro E, e con raggio EA si tagli in N l'arco predetto. Quindi col centro A, e con raggio AN, si facciano sopra i lati AB, AF, le sezioni b, g; e collo stesso raggio AN, e coi centri B, G, F, si facciano successivamente sopra gli altri tre lati le sezioni a d, e f, e h. Saranno a, b, c, d, e, f, g, h, i vertici dell'ottagono regolare cercato.

Se del quadrato proposto non fossero dati se non che i soli vertici ABGF, in tal caso la soluzione sarà come segue.

Soluzione II.ª Trovato il punto N, come nella soluzione I.ª si faccia ad EC = EdN, e BF = BdN. Quindi

con

con raggio AH, e col centro A si tiri un arco indefinito verso l'opposto vertice G; collo stesso raggio AH, e col centro B, si tiri un'altro arco verso l'opposto vertice F: ed altri due nello stesso modo, e col medesimo raggio se ne descrivano dai due centri G, ed F. Finalmente con raggio AC, e dai medesimi quattro punti a, B, G, F, come centri, si taglino rispettivamente a due a due i predetti archi; cioè dal centro A si faranno le due sezioni b, g; dal centro B le due sezioni a, d: e così dagli altri due centri G, ed F. Saranno a, b, c, d, e, f, g, h, i vertici dell'ottagono regolare cercato.

Problema XLIX.

356. In un cerchio BFEf, fig.a 146, di raggio AB, iscrivere tre cerchj, tangenti il cerchio dato, e tangenti tra loro.

Soluzione. Nella circonferenza del dato cerchio di fatta al raggio AB = BC = CD = DE = Ed = dc. Col centro B, e col raggio BD si descriva un arco che passi per i tre punti a, p, a'. Collo stesso raggio BD, e col centro E si tagli l'arco predetto nei due punti a, a'. Collo stesso raggio BD, e coi centri C, a, si descrivino due archi che si taglino in un punto V, e dai due punti D, d come centri, e col raggio stesso, se ne descrivino altri due che si taglino nel punto v. Quindi dai due centri V, v, e con raggio BD

si

si segnino due archi che passino pei due punti m, n. Col raggio AB, e coi centri a, a' si tagli la circonferenza del cerchio dato nei punti G, H, g, h. Nella stessa circonferenza si faccia allo stesso raggio AB = GL = HI = gl = hi. Quindi si faccia ad Aa = BF; ad IL = LY = IY = ly = iy. Si faccia inoltre ad Yy = Fm = Fn; e così pure a Dn = Dp.

Ora dal centro A, e con raggio mn, si descriva il cerchio RSRöXQZ: e preso nella circonferenza di quest'ultimo cerchio un punto arbitrario P, si faccia al raggio PA = RS = SR = RöX = XQ = QZ. Ciò fatto, se dai tre punti P, Q, R, come centri, e con raggio pn si descrivano tre cerchj, questi saranno i cercati, tangenti fra loro e tangenti il cerchio proposto, come si voleva.

Problema N. 130.

357. Trovare il raggio di quel cerchio, ch'essendo descritto dal centro A, fig.^a 146, riesca tangente ai tre cerchj iscritti nel dato cerchio BFEf, per il problema antecedente.

Soluzione. Si trovi la terza proporzionale alle due AB, Am (problema 25). Con questa presa per raggio, e dal centro A descritto un cerchio, sarà questo il cercato.

Problema 131.

358. In un dato cerchio BTEf, fig.ª 147, di raggio AB, iscrivere quattro cerchi che sieno tangenti al cerchio proposto, e tangenti tra loro.

Soluzione. Nella circonferenza del cerchio dato si faccia il raggio AB = BC = CD = DE. Quindi a BD = Ba = Ea; ad aa = BT = Bf; ad AB = TN = TO; quindi a BD = NP = OP. Col centro A, e col raggio a P si descriva il cerchio 2RsE. Finalmente, preso sulla circonferenza di questo cerchio un punto a piacere 2, si faccia in questa a B2 = TR = ES = fE. Coi centri 2, R, s, E, e con raggio a T si descrivano quattro archi; saranno questi i cercati

Problema 132.

359. Dal centro A del dato cerchio BTEf, fig.ª 147, descrivere un cerchio tangente ai quattro cerchi iscritti per il problema antecedente.

Soluzione. Si trovi la terza proporzionale alle due distanze dei punti TP, Ta. Con questa come raggio, dallo stesso centro A si descriva il cerchio bcde, sarà questo il cercato.

Problema 133.

360. In un cerchio BTEf, fig.ª 148, di raggio AB, iscrivere cinque quadrati eguali, de' quali uno sia concentrico al cerchio dato, e gli altri quattro abbiano due dei loro vertici

alla

alla circonferenza del cerchio medesimo, ed uno dei lati comune col quadrato concentrico.

Soluzione. Nella circonferenza del proposto cerchio si faccia al raggio AB = BC = CD = DE; e si faccia a BD = Ba = Ea; ed inoltre ad Aa = BF = Bf. Col raggio AB, e col centro a si tagli la circonferenza in G, e si faccia ad Aa = Gg. Col centro g, e coi raggi gA, ga si segnino due archi indefiniti Ap, aP. Quindi da a come centro, e con raggio Aa si tagli in P l'arco aP, e da questo punto P come centro, e collo stesso raggio Aa, si tagli in p l'altro arco Ap. Si faccia ad Ap = Bq = Fl = Em = fn. Collo stesso raggio Ap, e coi centri B, l, F, m, E, n, f, q si descrivano altrettanti archi dentro il dato cerchio, che a due a due si taglino nei punti LMNQ. Saranno LMNQ i vertici del quadrato concentrico, intorno al quale e sopra i cui lati insisteranno gli altri quattro quadrati BLQq, fQNn, ENMm, FlLM, due vertici di ciascuno de' quali sono nella periferia del cerchio proposto come si ricercava.

Problema 134.

361. In un dato cerchio BDRo, fig.^a 149, di raggio AB, iscrivere sei pentagoni regolari ed eguali, de' quali uno sia concentrico al cerchio proposto, e gli altri cinque, avendo ciascuno un lato comune col pentagono centrale, abbiano il vertice opposto a questo lato alla periferia del cerchio.

Soluzione. Nella circonferenza del dato cerchio si faccia

faccia al raggio $AB = BC = CD = DE = EG$; e si faccia a $BD = Ba$ $= Ea$; ed $Aa = BF = Db = Gb$. Si faccia inoltre nella cir= conferenza stessa alla distanza $bF = BP = PQ = QR = RS$. Col raggio bF, e coi centri B, P, Q, R, S, si segnino dentro il cerchio degli archi che vicendevolmente si taglino nei punti n, o, p, q, r. Quindi con raggio no, e coi centri n, o, p, q, r, si segnino cinque archi mc, de ec:, cioè dal centro n l'ar= co mc, dal centro o l'arco de, ec: Finalmente collo stesso raggio no, e coi centri B, P, Q, R, S, si taglino gli ar- chi predetti nei punti l, m, c, d, ec.; cioè dal centro B si fanno le due sezioni l, m; dal centro P le altre due sezioni c, d, e così di seguito. Saranno $n\,o\,p\,q\,r$, i vertici del pentagono regolare concentrico, sopra i lati del quale insistono gli altri cinque pentagoni re= golari ed eguali $nodPc$, $oeQfp$, ec., aventi ciascuno un vertice alla periferia del cerchio dato, come si ricerca= va.

Essendo il punto b centro del pentagono $nmBlr$; ed es= sendo la distanza bB il raggio del cerchio circoscritto al pentagono predetto, non che agli altri pentagoni eguali, come si potrebbe dimostrare; ciò aggiunge una nuova bella proprietà al punto b. Poichè oltre alle divisioni in estrema media ragione che per esso nascono nel dia= metro $BbAE$, e la determinazione fatta per esso della bF lato del pentagono iscritto al cerchio di raggio AB, e della bA lato del decagono iscritto nel cerchio medesimo: si ha

inoltre.

inoltre 6B raggio del cerchio circoscritto ai sei pentagoni regolari, che si possono iscrivere al maggior cerchio di raggio AB, come si è veduto in questo problema.

Problema 135.

362. In un dato cerchio BDd, dig.a 150, di raggio AB, iscrivere sette esagoni regolari ed eguali: uno de' quali abbia un centro al cerchio dato; e gli altri sei, sussistendo ciascuno sopra i lati del concentrico, tocchino col lato opposto al lato comune coll'esagono centrale, un arco del cerchio proposto. . . . . .

Soluzione. Nella circonferenza del cerchio dato si faccia il raggio AB = BC = CD = DE = Ed = dc. Quindi con raggio BD, e coi centri E, c, si descrivino due archi che si taglino in P. Con raggio CP, e coi centri C, d, si descrivino altri due archi che si taglino in 2. Collo stesso raggio 2C, e col centro 2 si tagli la circonferenza del cerchio dato in e. Sarà de il lato dei sette esagoni regolari ed eguali, che si devono iscrivere nel dato cerchio, e che si costruiranno nella maniera seguente.

Con raggio de, lato degli esagoni da iscriversi, e coi centri d, e, si descrivino dentro del cerchio due archi che si taglino in un punto a; sarà a il centro dell'esagono che si costruirà sopra il trovato lato de. Locchè fatto centro nel punto a, e con raggio ae si descriva il cerchio efghi.

Quindi

Quindi col raggio stesso, e col centro a se ne descriva un altro concentrico al dato cerchio bd.

Ora, col centro a, e col raggio ab descritto un cerchio, si faccia nella circonferenza di questo, cominciando dal punto a della periferia stessa, al raggio ab = an = no = op = pq = qr. I punti a, n, o, p, q, r, saranno i centri dei sei esagoni che si costruiranno intorno al concentrico, e per conseguenza dei circoli circoscritti agli esagoni stessi. Per le quali cose dai predetti punti a n o p q r come centri, e con raggio ae, descritti sei cerchj, nelle mutue intersezioni di questi tra loro, col cerchio massimo proposto, e col cerchio concentrico già descritto, si avranno i vertici dei sette esagoni regolari cercati; dei de' quali sarà evidente, che uno de' loro lati un arco del cerchio dato, ed avranno il lato opposto al predetto, comune coll'esagono concentrico, come si ricercava.

363. Benchè il problema che segue non avrebbe dovuto far parte dei problemi di questa geometria, avendo egli per oggetto la descrizione dell'ellisse, della qual curva non spetta agli elementi il trattare: ciò non ostante, e perchè il genere della sua descrizione non suppone alcuna cognizione estranea alla Geometria elementare, e perchè nelle arti belle e nelle arti meccaniche accade sovente di dover far uso di questa curva; per ciò ho creduto opportuno l'indicare qui la maniera di descrivere questa curva col solo compasso, e con dati quattro archi di cerchio tangenti

Tra

tra loro. facendo però astrazione dalla sua generazione nel cono, dalle sue proprietà, e da altri generi di costruzione; delle quali cose parleremo all'uopo nella Stereografia.

Problema 136.

364. Dati i due assi di una ellisse, il maggiore AB, ed il minore MN, fig.ª 151, descrivere intorno ad esso la periferia ellittica composta di quattro archi di cerchio, che sieno tangenti tra loro.

Soluzione. Col centro C, dove si tagliano i proiettati assi, e col raggio CB, ch'è il semi-asse maggiore, si descriva il semicerchio BbDa, e si faccia ad Ea = Ed. Col centro B, e col raggio Bd si tagli l'asse maggiore in d. Col centro A, e col raggio An, semi-asse minore, si tagli il semi-asse maggiore AE nel punto m. Collo stesso centro A, e col raggio Ad si descriva l'arco indefinito de, e si faccia ad Em = de. Quindi con un raggio arbitrario, e coi centri d, E e si tagli il semicerchio BbDa nei due punti p, q. Col raggio pq, e col centro A si tagli l'asse maggiore BE in P, e 2. Quindi coi centri P, 2, e col raggio PB = 2E si descrivano gli archi Bf, Eg, e si faccia a PB = Bb = bf = Eg = Eg. Si faccia a P2 = PB = Pr = 2E = 2r. Quindi finalmente col centro R, e col raggio RB si descriva l'arco fg, che passerà per l'estremità M dell'asse minore, e collo stesso raggio Rf = Rg, e col

centro

centro $\mathfrak{C}$ si descriva l'arco fg, che passerà per l'estremità N dello stesso asse minore. La curva $BZmNEgNf$, sarà la periferia della cercata figura.

Dimostrazione. Essendo equilateri i triangoli BZP, PZR, saranno eguali gli angoli BBZ, ZPR; quindi le due ZP, PR formeranno una sola retta, perchè i due angoli $ZPA + APR$ sono eguali ai due $ZPA + APV$. Dunque i due archi BZ, ZG si toccheranno l'un l'altro in Z. Lo stesso contatto si dimostra ai punti f, E, g. Se poi si supponga per brevità $AB = 1$, sarà $BD = VB = Bd$; quindi $Ad = V3 - 1$. Essendo poi $Ad : de :: Ap : pq$, sarà ancora, moltiplicando tutti due i termini della prima ragione per $V3 + 1$, $Ad(V3+1) : de(V3+1) :: Ap : pq$, e sostituendo i valori numerici di Ap, e di pq, ed eseguendo la moltiplicazione nel primo termine, si avrà $2 : de(V+1) :: 1 . pq$. Quindi $2pq = 2AP = de(V3+1) = PZ = 2PR$. Essendo poi $PRZr$ un rombo, si avrà $(Rr)^2 = 4(PR)^2 - (PZ)^2 = 3(PR)^2$. Quindi $Rr = PR \cdot V3 = de(3+V3)$, e $Rd = \frac{1}{2} de(3+V3)$. Si ha poi $dM = Am = AE - Em = AE - de = 1 - de$. Quindi $Rd + dM = 1 + \frac{1}{2} de(1+V3)$, ossia $RM = 1 + \frac{1}{2} PR$. Essendo poi $PZ = PB = 1 - AP = 1 - \frac{1}{2} PR$, si avrà $PZ + PR = 1 + \frac{1}{2} PR$, cioè $ZR = RM$. Dunque l'arco ZG passerà per M. Istessamente si dimostrerà che l'arco fg passerà per n. Dunque ec.

Qualche altro problema di questo genere avrei qui potuto aggiugnere, ed l'economia delle tavole da un la-

to; ed il poco vantaggio che Parquelli ne avrebbero ricavato gli Artisti dall'altro, non mi avesse determinato di ommetterli.

E qui pongo fine a questa Geometria, la quale se non dispiacerà ai Geometri, e la potrà essere in qualche modo utile ai giovani Artisti, pei quali principalmente fu scritta, sarò della mia fatica abbastanza ricompensato.

Fine.

Indice

Indice

dei Libri e dei Capitoli di questa Geometria.

Libro I.

Definizioni e Nozioni preliminari ... pag.e ... 1.
Avvertimento ... ,, ... 13.

Libro II.

Dell'addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione delle linee rette ... ,, 15.
Capitolo I. Dell'addizione delle rette ... ,, ivi.
Capitolo II. Della sottrazione delle rette ... ,, 16
Capitolo III. Della moltiplicazione delle rette ... ,, 17.
Capitolo IV. Della divisione delle rette ... ,, ivi.

Libro III.

Dell'incontro e della intersezione delle rette; della costruzione, divisione, e moltiplicazione degli angoli da esse formati; delle perpendicolari e delle parallele ... ,, 21
Capitolo I. Delle Normali, o perpendicolari ... ,, ivi.
Capitolo II. Delle parallele ... ,, 23.
Capitolo III. Della bisezione degli angoli, e trisezione

dell'

dall'angolo retto - - - - - pag.a 24.
Capitolo IV. Della costruzione e moltiplicazione degli angoli - - - - - - - ,, 25.

Libro IV.

Delle rette e delle distanze proporzionali - ,, 28.
Definizioni - - - - - - - - ,, ivi.
Capitolo I. Delle terze proporzionali - - - - - ,, 30.
Capitolo II. Delle quarte proporzionali - - - - ,, 31.
Capitolo III. Delle medie proporzionali geometriche ,, 32
Capitolo IV. Della divisione delle rette in parti proporzionali - - - - ,, 33.
Capitolo V. Delle rette che si tagliano, e di quelle che concorrono in un punto incognito - ,, 35.

Libro V.

Capitolo I. Della costruzione delle figure rettilinee, e dei poligoni regolari - - ,, 39.
Capitolo II. Della costruzione dei poligoni regolari sopra lati dati - - - - - ,, 40.

Libro VI.

Della divisione della circonferenza, e degli archi del cerchio - Capitolo I. - - - ,, 45.
Capitolo II. Della divisione degli archi di cerchio - ,, 54.
Avvertimento - - - - - - - - ,, 56.

Lib:

Libro VII.

Capitolo I. Dei poligoni regolari ed irregolari . .
iscritti e circoscritti al cerchio, e dei centri. pag.ª 57.
Capitolo II. Dei poligoni regolari circoscritti al cerchio ... „ 59.
Capitolo III. Dei poligoni regolari iscritti al cerchio . „ 61.
Capitolo IV. Dei Centri ... „ 62.
Capitolo V. Dei Circoli tangenti, e delle tangenti ...
al cerchio ... „ 67.
Capitolo VI. Della capacità degli archi di cerchio
rispetto agli angoli ... „ 70.

Libro VIII.

Della similiglianza delle figure, e della costruzione
dei poligoni simili in generale .. „ 71.
Capitolo I. Definizioni e nozioni preliminari ... „ ivi.
Capitolo II. Della costruzione dei poligoni simili a
poligoni dati, e loro lati omologhi proposti ... „ 72.

Libro IX.

Delle figure equivalenti, ossia dei poligoni equivalenti
in superficie ad altri poligoni; di quelli che essendo
simili a poligoni dati, sono nel tempo stesso
equivalenti ad altri poligoni parimente dati;
dei differenti rapporti di superficie fra poligo-
ni simili, e fra poligoni di differente specie; e
finalmente del metodo di trovare i rispettivi
loro

loro lati, e di costruirli . . . . . pag: 46.
Nozioni preliminari . . . . . ,, ivi.
Capitolo I. Dei poligoni equivalenti, ad altri poligoni
dati, e della loro costruzione . . . . . ,, 78.
Capitolo II. Dei poligoni simili a poligoni dati, e nello
stesso tempo equivalenti ad altri poligoni
parimente dati. . . . . ,, 85.
Capitolo III. Dei differenti rapporti fra le aree, o le
grandezze delle varie superficie piane,
e dei varj poligoni . . . . . ,, 90.
Capitolo IV. Dei poligoni simili a poligoni dati, e le
cui superficie stanno in differenti rap=
porti con quelle di altri poligoni parimente
dati. . . . . ,, 98.

Libro X.

Di alcune unità di misure lineari; della costru
zione delle Scale Geometriche, e dei Diffe=
renti loro rapporti. . . . . ,, 106.
Nozioni preliminari . . . . . ,, ivi.
Capitolo I. Del rapporto fra il Metro ed il Piede del
Friuli, e mezzo di ridurre qualunque numero
di metri in piedi del Friuli, e viceversa. ,, 108.
Capitolo II. Della costruzione delle Scale geome=
triche, e del modo di prendere sopra di
queste le occorrenti misure. . . . . ,, 110.

Cap=

Capitolo III. Del rapporto geometrico fra due scale della medesima specie . . . . . pag.a 118.

Libro XI.

Della Planimetria, ossia della valutazione delle superficie . . . . „ 122

Definizioni . . . . „ ivi.

Capitolo I. Del Metro quadrato, non che del Passo quadrato e del piede quadrato del Friuli, e della vicendevole corrispondenza fra queste misure superficiali . . . . „ 124.

Capitolo II. Dei numeri complessi, e degl'incomplessi . . . . „ 126.

Definizioni . . . . „ ivi.

Capitolo III. Della quadratura dei poligoni in generale, ovvero delle superficie circoscritte da linee rette . . . . „ 128.

Capitolo IV. Delle superficie circolari, ovvero della quadratura del cerchio, e delle sue parti. Problemi per approssimazione . . . . „ 134.

Libro XII.

Problemi varj . . . . „ 149.